Imposible pero no tan difícil

Innumerables veces nos han dicho que la integral $\int e^{-x^2}\,dx$ no se puede calcular con funciones elementales y lo más probable es que todas ellas se olvidaran de explicarnos por qué. La demostración no es tan complicada como cabría esperar y además es sorprendentemente general. Desafortunadamente este margen de la hoja volante es demasiado estrecho para contenerla… sin embargo confiamos en que sea espacioso para dar una idea.

Aclaremos primero cuáles son las funciones elementales. Un vistazo a nuestra calculadora nos lleva a considerar raíces, exponenciales, logaritmos, senos, cosenos, arcosenos y arcocosenos. Si usamos números complejos las funciones trigonométricas se pueden escribir con exponenciales ya que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, mientras que sus inversas requieren logaritmos. Denotemos con $\mathbb{C}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ los cocientes de polinomios complejos en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Así $\mathbb{C}(x)$ son las funciones racionales en $\mathbb{C}$, si y_1 es una exponencial o un logaritmo de un elemento de $\mathbb{C}(x)$ o la solución de una ecuación algebraica (por ejemplo una raíz), entonces $\mathbb{C}(x, y_1)$ es un cuerpo cuyos elementos diríamos que son funciones elementales, e iterando podemos crear cuerpos $K = \mathbb{C}(x, y_1, \dots, y_n)$ y definir matemáticamente función elemental como la que está en alguno de estos K. El resultado fundamental, debido a Liouville y anticipado parcialmente por Laplace, es que dada $f \in K$ si $\int f$ es una función elemental (quizá no en K) entonces necesariamente $\int f = f_0 + \sum \lambda_j \log f_j$ con $f_0, f_1, \dots \in K$ y $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Aplicándolo al caso $K = \mathbb{C}(x, f(x))$, $f(x) = e^{P(x)}$ con P un polinomio, al derivar y eliminar denominadores se deduce con algún trabajo (pero no demasiado) que la única posibilidad es $\lambda_j = 0$ y $f_0(x) = Q(x) f(x)$ donde Q es un polinomio tal que $1 = Q' + QP'$, lo que lleva a una contradicción si $QP' \notin \mathbb{C}$. En definitiva, se concluye que $\int e^{P(x)}\,dx$ no se puede calcular si el grado de P es mayor que uno.

¿Y cómo se demuestra el resultado fundamental? Si alguien nos dijera que para cierta $f \in \mathbb{C}(x)$ se tiene $\int f \in \mathbb{C}(x, e^x)$, sin mostrarle el modo de hacer la integral le convenceríamos de que la dependencia en e^x es superflua sin más que derivar, ya que una exponencial no puede desaparecer por derivación. Cambiando e^x por una raíz ocurriría algo similar y también por un logaritmo excepto en el caso de tener una función lineal de un logaritmo, ya que al derivar $a \log g + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, el logaritmo desaparece. El resultado fundamental es una extensión de este hecho de $\mathbb{C}(x)$ a K y garantiza que al integrar no pueden aparecer cosas que no estuvieran ya en el integrando, porque al derivar habría una contradicción, salvo combinaciones lineales de logaritmos, pues una vez derivadas esconden su aspecto logarítmico.

(Para la prueba completa véase `http://www.uv.es/%7Eivorra/Libros/Primitivas.pdf`).