Integrando al azar

En Cálculo I nos dijeron que la integral era el área y durante unas clases un lío de sumas inferiores y superiores de Riemann. A continuación nos probaron, con trabajo, que $\int_0^1 x\ dx = 1/2$ y eso era muy natural porque el área del triángulo es $b \cdot a/2 = 1 \cdot 1/2$. Después, con el superteorema fundamental del cálculo ya se podía deducir $\int_0^a x^k\ dx = a^{k+1}/(k+1)$ y casi no volvieron a aparecer las sumas de Riemann. Pero olvidándonos de las demostraciones (que Spivak nos perdone) ¿hay alguna razón natural por la que pueda creerme que $\int_0^a x^k\ dx$ tiene que ser $a^{k+1}/(k+1)$? Lo siguiente es un intento usando probabilidad:

Si me invento tres números $x, y, z \in [0,1]$, ¿cuál es la probabilidad de que el primero sea el mayor? Por la simetría del problema 1/3. Y dado x, ¿cuál es la probabilidad de que y sea menor que x? Evidentemente x porque la probabilidad de que un número de $[0,1]$ esté en $[0,1/2)$ es $1/2$, de que esté en $[0,1/3)$ es $1/3$ y de que esté en $[0,x)$ es x. Lo mismo ocurre con z y así se tiene que $\mathrm{Prob}(y,z<x) = x^2$. Sumando (integrando) en todos los posibles valores de x se deduce $\int_0^1 x^2\ dx = 1/3$. Un cambio de escala prueba $\int_0^a x^2\ dx = a^3/3$ y considerando $k+1$ números en lugar de 3 se llega a $\int_0^a x^k\ dx = a^{k+1}/(k+1)$.

Se podría elaborar más el argumento y hacer aparecer sumas de Riemann pero entonces aumentaría el número de líneas y ya es bastante que una *hoja volante* tenga cuatro páginas sin contar sus *páginas web*.