Ecuación funcional $\Rightarrow$ Poisson

Cualquier función real f se puede escribir como suma de una par y otra impar. Como la fórmula de sumación de Poisson es trivial para funciones impares, se puede suponer que f es par, y todo lo que hay que probar es

$$\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\int_0^{\infty}f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{f}(n) \tag{1}$$

con $\widetilde{f}$ la transformada coseno $\widetilde{f}(\xi)=\int_0^\infty f(x)\cos(2\pi\xi x)\,dx$. Como es habitual supondremos que f es muy regular, digamos por ejemplo $f\in C_0^\infty$.

Si F es la transformada de Mellin de f (esto es, $F(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx$) por la fórmula de inversión ($f(x)=\int_{(\sigma)}F(s)x^{-s}\,ds$) se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}F(s)\zeta(s)\,ds \qquad \text{para } \sigma>1$$

donde (σ) denota la recta vertical $\operatorname{Re} s=\sigma$ recorrida en sentido ascendente.

Integrando por partes, $F(s)=-s^{-1}\int_0^\infty f'(x)x^s\,dx$, lo cual implica que F tiene una extensión meromorfa a $\operatorname{Re} s>-1$ con un único polo en $s=0$ de residuo $f(0)$. Por otro lado, $\zeta(0)=-1/2$ y ζ tiene un polo simple en $s=1$ de residuo 1. Así pues, por el teorema de los residuos:

$$\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\int_0^{\infty}f(x)\,dx+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}F(s)\zeta(s)\,ds \qquad \text{para } -1<\sigma<0.$$

Entonces para deducir (1) sólo falta probar

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{f}(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}F(s)\zeta(s)\,ds \qquad \text{para } -1<\sigma<0. \tag{2}$$

La ecuación funcional de la función ζ en forma asimétrica es $\zeta(1-s)=2C(s)\zeta(s)$ con $C(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\pi s/2)$. Con ella y un cambio de variable $s\mapsto 1-s$, el segundo miembro de (2) es

$$\frac{1}{\pi i}\int_{(1-\sigma)}F(1-s)C(s)\zeta(s)\,ds=\frac{1}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(1-\sigma)}F(1-s)C(s)n^{-s}\,ds$$

(la serie de Dirichlet de ζ converge absolutamente porque $1<1-\sigma$). La función $F(1-s)C(s)$ es holomorfa en $0<\operatorname{Re} s<2$ porque $C(1)=0$. Así que se puede mover la línea de integración a $\operatorname{Re} s=\tau$ con $0<\tau<1$. Empleando la fórmula $C(s)=\int_0^\infty\cos(2\pi x)x^{s-1}\,dx$ válida para $s\in(\tau)$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}F(s)\zeta(s)\,ds=\frac{1}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\cos(2\pi x)\int_{(\tau)}F(1-s)x^{s-1}n^{-s}\,ds\,dx.$$

El cambio $x\mapsto nx$ y $f(x)=(2\pi i)^{-1}\int_{(\tau)}F(1-s)x^{s-1}\,ds$ (la fórmula de inversión) permiten deducir (2).