Una identidad de funciones elípticas sin funciones elípticas

Fernando Chamizo

3 de febrero de 2018

1. Motivación

Si una función entera es 1-periódica y τ-periódica con $\operatorname{Im}\tau > 0$ (basta con $\tau \notin \mathbb{R}$) por el teorema de Liouville, es constante. En general, se llama *función elíptica* a una función meromorfa con dos periodos independientes sobre $\mathbb{R}$. Se prueba que, fijados los periodos, todas se pueden escribir en términos de una función especial (la $\wp$ de Weierstrass) y su derivada. Estos resultados permiten establecer unas identidades alucinantes de las que en muchos casos no se conocen pruebas elementales verdaderamente sencillas. Algunas de las increíbles fórmulas descubiertas por Ramanujan [2] se encuadran en este contexto.

El objetivo que me ha guiado al escribir esta nota es dar una prueba que puedan seguir paso a paso los estudiantes de un curso básico de variable compleja del siguiente resultado:

Teorema 1. *Las funciones holomorfas en* $|w| < 1$

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)w^{2k+1}}{1-w^{4k+2}} \qquad y \qquad G(w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^{(2k+1)^2}, \tag{1}$$

verifican la identidad $F(w^4) = \big(G(w)\big)^4$.

De aquí es posible deducir una fórmula para el número de representaciones como suma de cuatro cuadrados impares, pues $\big(G(w)\big)^4$ es su función generatriz. Esta relación entre combinatoria, variable compleja y aritmética es, a mi juicio, de las que crean afición en matemáticas.

La demostración habitual del teorema anterior con funciones elípticas requiere dominar una notación un tanto barroca que proviene de la primera mitad del siglo XIX. La prueba que se incluye aquí es esencialmente la que se hace en [1] en unas pocas líneas pero escapando de la notación clásica y explicada desde primeros principios para alguien que desconoce la teoría de funciones ϑ e integrales elípticas. En la exposición sigo el esquema de [3]. Son los lectores los que deben juzgar si tiene sentido alargar tanto la prueba a cambio de explicarla hasta el nivel de los primeros cursos de grado. Aparte del objetivo antes indicado, con suerte esta nota es un primer paso para que alguien sienta curiosidad por estudiar la teoría en profundidad.

2. El razonamiento

La idea que vamos a usar de manera fundamental es la sencilla aplicación del teorema de Liouville mencionada al principio: Si f es entera

$$f(z) = f(z+1) = f(z+\tau) \quad \text{con Im } \tau > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ constante.} \tag{2}$$

Siguiendo a Jacobi, para construir funciones "explícitas" con dos periodos nos valdremos de la siguiente función, que es $\theta_3(z|\tau)$ con una terminología más habitual,

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z} \quad \text{donde} \quad q = e^{\pi i \tau}. \tag{3}$$

Como hemos elegido Im $\tau > 0$ los coeficientes tienden a cero a toda velocidad y la serie define una función entera. Para nosotros τ y por tanto q son constantes aunque en un punto de la prueba haremos una leve excepción. Esta función es obviamente 1-periódica y aunque no es τ-periódica, lo es salvo un factor. Concretamente, se tiene

$$\theta(z+1) = \theta(z) \qquad \text{y} \qquad \theta(z+\tau) = q^{-1} e^{-2\pi i z} \theta(z). \tag{4}$$

La idea es que considerando ciertos cocientes tendremos funciones con los dos periodos. Así un cálculo prueba que

$$A(z) = \frac{e^{-\pi i z}\theta(z+1/2)}{\theta(z+\omega)} \qquad \text{y} \qquad B(z) = \frac{e^{-\pi i z}\theta(z)}{\theta(z+\omega)}, \qquad \text{donde} \quad \omega = \frac{1+\tau}{2}, \tag{5}$$

satisfacen $f(z+1) = \pm f(z)$ y $f(z+\tau) = \pm f(z)$ por tanto A^2 y B^2 son funciones elípticas (meromorfas con periodos 1 y τ) pero no son enteras ya que el denominador se puede anular. Las funciones A y B son impares, y por tanto A^2 y B^2 son pares, porque manipulaciones sencillas con la serie (3) llevan a

$$\theta(z) = \theta(-z), \quad \theta(z+\frac{1}{2}) = \theta(\frac{1}{2}-z), \quad \theta(z+\omega) = -e^{-2\pi i z}\theta(\omega - z). \tag{6}$$

De la última relación para $z = 0$ se deduce que θ se anula en ω y con (4) se tiene la implicación inversa en

$$\theta(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \omega + n + m\tau \quad \text{con } n, m \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

La implicación directa junto con que los ceros son simples se sigue de una aplicación del principio del argumento. Más adelante veremos que hay una manera de evitar apelar a este principio y por ahora daremos por ciertos estos resultados.

La combinación $\theta^2(0)A^2(z)-\theta^2(1/2)B^2(z)$ cancela el polo doble en $z=0$ y por la periodicidad de hecho cancela todos los polos, por tanto estamos en condiciones de aplicar (2) a esta función y deducir

$$\frac{e^{-2\pi iz}}{\theta^2(z+\omega)}\big(\theta^2(0)\theta^2(z+1/2)-\theta^2(1/2)\theta^2(z)\big)=K \quad \text{(constante)}. \tag{8}$$

Para cada τ dado, K puede ser una constante distinta pero eso es indiferente para lo que sigue. Si el lector está pensando que la definición de A y B y la elección de la combinación para cancelar los polos son un poco arbitrarias, está en lo cierto. Hay muchísimas posibilidades y con habilidad podrá tener éxito emulando a Ramanujan encontrando identidades tan sorprendentes como la clásica del Teorema 1.

Tomando $z=\omega$ en (8) se sigue

$$K=-q\theta^2(\tau/2) \tag{9}$$

donde se ha usado $\theta(z)=\theta(z+1)$ y $q=e^{\pi i\tau}$ para simplificar. Como $\theta(z)$ y $\theta(z+1/2)$ son pares por (6), cerca de cero $\theta(z)=\theta(0)+\theta''(0)z^2/2+\dots$ y $\theta(z+1/2)=\theta(1/2)+\theta''(1/2)z^2/2+\dots$ por tanto el paréntesis en (8) es $\big(\theta^2(0)\theta(1/2)\theta''(1/2)-\theta^2(1/2)\theta(0)\theta''(0)\big)z^2+\dots$ mientras que $\theta(z+\omega)=\theta'(\omega)z+\dots$ porque θ tiene un cero simple en ω. Así pues, tomando $z\to 0$ en (8)

$$K=\frac{\theta(0)\theta(1/2)}{\big(\theta'(\omega)\big)^2}\big(\theta(0)\theta''(1/2)-\theta(1/2)\theta''(0)\big). \tag{10}$$

De las dos fórmula para K se obtiene

$$\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}-\frac{\theta''(1/2)}{\theta(1/2)}=q\Big(\frac{\theta(\tau/2)\theta'(\omega)}{\theta(1/2)\theta(0)}\Big)^2. \tag{11}$$

Si pensamos en la definición original (3) esto da una identidad bien sorprendente pero no tan bonita como la del Teorema 1 y aparentemente no relacionada. En realidad equivale a ella cuando se usa (2) para obtener una curiosa fórmula alternativa para $\theta(z)$.

Consideremos la función definida por un producto infinito

$$P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+q^{2n-1}e^{2\pi iz}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{-2\pi iz}\big). \tag{12}$$

Esta función satisface las relaciones

$$P(z+1)=P(z) \qquad \text{y} \qquad P(z+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi iz}P(z). \tag{13}$$

La primera es trivial y la segunda es fundamentalmente tener la idea feliz de reordenar los factores.

Como (4) y (13) son similares, $\theta(z)/P(z)$ es una función elíptica. Por otro lado, cada cero (7) de θ anula justamente un factor de P y cada factor se anula en un cero. Aplicando (2) a $\theta(z)/P(z)$ se tiene que este cociente es una constante C (de nuevo, para cada τ fijado). Esto da una prueba de la implicación directa de (7) porque si hubiera ceros no contemplados allí o alguno fuera doble, se tendría $C = 0$ lo que es incompatible con que θ no sea idénticamente nula. Se cumple

$$C = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n}\right) \tag{14}$$

y aunque la prueba es elemental (parece que debida a Gauss [3]) y medianamente breve, el lector juzgará tras las siguientes líneas que no es nada fácil que a uno se le ocurra:

Sustituyendo $z = 1/2$ y $z = 1/4$ en $C = \theta(z)/P(z)$, dividiendo por el segundo miembro de (14) y simplificando un poco,

$$\frac{C}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^2\left(1-q^{2n}\right)} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{4n-2}\right)\left(1-q^{2n}\right)}. \tag{15}$$

Si en el denominador de la segunda fracción cambiamos q por q^4 se tiene

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{8n-4}\right)^2\left(1-q^{8n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{4n-2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{4n-2}\right)\left(1-q^{8n-4}\right)\left(1-q^{8n}\right) \tag{16}$$

y el último producto es $\prod\left(1-q^{2n}\right)$ porque todo número par o bien es de la forma $2(2n-1)$ o bien $2(4n+2)$ o bien $2(4n)$, sin ambigüedades. Así recuperamos el denominador de la tercera fracción. Entonces la segunda fracción define una función $f(q)$ holomorfa en $|q| < 1$ que cumple $f(q) = f(q^4)$. Si pensamos en su desarrollo de Taylor en cero, se deduce $f(q) = f(0) = 1$.

La fórmula $C = \theta(z)/P(z)$ con C como en (14) es suficientemente famosa como para recibir un nombre:

Teorema 2 (Fórmula del triple producto de Jacobi)**.** *Para $q, z \in \mathbb{C}$ con $|q| < 1$, se tiene*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}e^{2\pi i z}\right)\left(1+q^{2n-1}e^{-2\pi i z}\right).$$

Con ella haremos simplificaciones masivas en (11). Para $n = 1$ el factor $1 + q^{2n-1}e^{-2\pi i z}$ se anula en $z = \omega$ y su derivada en ese punto es $2\pi i$, por tanto

$$\theta'(\omega) = 2\pi i C(1-q^2)\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1-q^{2n-2}\right) = 2\pi i C^3. \tag{17}$$

Por otro lado,

$$\theta(1/2)\theta(0) = C^2 \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - q^{4n-2}\big)^2 \qquad \text{y} \qquad \theta(\tau/2) = 2C \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + q^{2n}\big)^2 \tag{18}$$

Esto prueba

$$\frac{\pi i \theta(1/2)\theta(0)\theta(\tau/2)}{\theta'(\omega)} = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - q^{4n-2}\big)^2 \big(1 + q^{2n}\big)^2 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\big(1 - q^{4n-2}\big)^2 \big(1 - q^{4n}\big)^2}{\big(1 - q^{2n}\big)^2} = 1 \tag{19}$$

porque el producto es telescópico, cada término del numerador aparece también en el denominador.

Entonces el segundo miembro de (11) dividido por $-\pi^2$ es

$$qt^4(\tau/2) = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2+n+1/4}\Big)^4 = \Big(2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\Big)^4 = 16\big(G(w)\big)^4 \qquad \text{con } w = q^{1/4}, \tag{20}$$

donde se ha empleado la notación del Teorema 1.

Por otra parte,

$$\theta''(z) = -4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 q^{n^2} e^{2\pi i n z} = -4\pi^2 q \frac{d}{dq}\theta(z) \tag{21}$$

donde derivar respecto a la constante q tiene el significado formal obvio, es como si por un momento variásemos q. Entonces el primer miembro de (11) dividido por $-\pi^2$ es

$$4q\frac{d}{dq}\log\frac{\theta(0)}{\theta(1/2)} = 4q\frac{d}{dq}\log\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\big(1 + q^{2n-1}\big)^2}{\big(1 - q^{2n-1}\big)^2} \tag{22}$$

El logaritmo del producto es la suma de logaritmos y derivando término a término se obtiene

$$8\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}} + \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}}\Big) = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1 - q^{4n-2}} = 16F(w^4), \tag{23}$$

con $w = q^{1/4}$, como antes, y la notación del Teorema 1. La igualdad de (20) y (23) termina la demostración del resultado.

3. Algunos comentarios

¿En qué sentido las funciones elípticas son *elípticas*? El nombre tiene una motivación histórica indirecta. Consideremos las integrales

$$I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad \text{y} \qquad J(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}. \tag{24}$$

Todos sabemos calcular la primera y ninguno sabemos calcular la segunda en términos de funciones elementales (porque no se puede). La función inversa de $I(x)$ en un entorno de cero es $\operatorname{sen} x$ que se extiende a $\mathbb{C}$ de manera 2π-periódica. Pues bien, en el caso de la inversa de $J(x)$, se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con dos periodos, es una función elíptica, y cumple unas fórmulas de adición que recuerdan a las de las funciones trigonométricas. Además el fenómeno se repite genéricamente al reemplazar $1 - t^4$ por polinomios de tercer o cuarto grado. La integral que da la longitud de un arco de elipse es de este tipo salvo que aparece también un t^2 en el numerador del integrando. Su inversa no da lugar a una función elíptica en el rigor de la definición pero sí a una función meromorfa relacionada con ellas (a veces se dice que es elíptica de segundo tipo) y es de ahí de donde proviene el nombre.

En la teoría clásica se suele trabajar con cuatro funciones denotadas $\theta_j(v|\tau)$, $1 \le j \le 4$, estrechamente relacionadas con $\theta(v+\omega)$, $\theta(v+\tau/2)$, $\theta(v)$ y $\theta(v+1/2)$. Todas ellas satisfacen relaciones similares a (4) y por tanto sus cocientes dan lugar a funciones elípticas, de hecho las generan. Los valores $\theta_j(0|\tau)$ satisfacen una relación básica encontrada por Jacobi que con nuestra notación es

$$\theta^4(0) = q\theta^4(\tau/2) + \theta^4(1/2). \tag{25}$$

Se deduce eligiendo $z = 1/2$ en (8) y comparando con (9). Una vez más, en términos de la serie de potencias que define θ esta relación es muy sorprendente.

Ramanujan fue un verdadero campeón obteniendo fórmulas que escapaban de lo natural en el marco clásico. Terminemos con uno de sus hallazgos, del cual desconozco la prueba: Si t_7 es el valor de $\theta(0)$ cuando $\tau = 7i$ y t_1 su valor para $\tau = i$, entonces

$$14t_7 = \sqrt[8]{28}\Big(\sqrt{13+\sqrt{7}} + \sqrt{7+3\sqrt{7}}\Big)t_1. \tag{26}$$

¿No es increíble que alguien autodidacta y aislado pudiera llegar a resultados de este tipo?

Agradecimientos. Estoy en deuda con Carlos Pastor por sus comentarios y correcciones de una versión anterior de estas notas.

Referencias

[1] L. Carlitz. A short proof of Jacobi's four square theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17:768–769, 1966.

[2] G. H. Hardy. *Ramanujan: twelve lectures on subjects suggested by his life and work.* Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

[3] H. Rademacher. *Topics in analytic number theory.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Edited by E. Grosswald, J. Lehner and M. Newman, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 169.