Aplicaciones conformes

Fernando Chamizo

24 de abril de 2018

Nota: Las secciones 2 y 3 corresponden al capítulo 6 de [3] aunque aquí no se sigue muy de cerca.

1. Generalidades y ejemplos

En lo sucesivo Ω y Ω' denotarán abiertos de $\mathbb{C}$.

Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *conforme* si preserva ángulos. Concretamente, un *arco regular* es una función $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo que contiene a 0, tal que γ' existe y no se anula, por tanto es posible definir un vector tangente. Dado z_0 y dos arcos regulares con $z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ se define el ángulo entre ellos en z_0 como el ángulo entre sus vectores tangentes. Entonces f es *conforme* cuando pasa arcos regulares en arcos regulares y preserva el ángulo entre ellos en cada $z_0 \in \Omega$. El hecho de aplicar arcos regulares en arcos regulares exige que las aplicaciones conformes tengan derivadas parciales con respecto a la parte real e imaginaria y que las derivadas direccionales no se anulen. Se tiene el siguiente resultado que a veces se toma como definición (por ejemplo en [2], dependiendo de la edición):

Teorema 1.1. *Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es conforme si y sólo si es holomorfa y f' no se anula en Ω.*

Es importante entender que suponemos el ángulo orientado, de un vector a otro, de modo que no es lo mismo α que $2\pi - \alpha$. Así $f(z) = \overline{z}$ no es conforme porque invierte la orientación. En [1] se llaman *isogonales* a las aplicaciones conformes en este sentido generalizado que identifica α y $2\pi - \alpha$.

Demostración. Ya hemos visto que si f es conforme, las parciales existen y no se anulan, veamos que f es holomorfa.

Sea γ un arco regular con $\gamma(0) = z_0 \in \Omega$ y $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Si rotamos γ cierto ángulo alrededor de z_0, $\widetilde{\gamma}'(0)$ debe rotar ese mismo ángulo, así que una vez fijado z_0, el ángulo de $\gamma'(0)$ a $\widetilde{\gamma}'(0)$ es independiente de γ. Si $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$ la regla de la cadena implica $\widetilde{\gamma}'(0) = f_x x'(0)+if_y y'(0)$ donde f_x y f_y son las derivadas parciales evaluadas en z_0. Dividiendo entre $\gamma'(0)$, tras algunas manipulaciones esto se escribe como

$$\frac{\widetilde{\gamma}'(0)}{\gamma'(0)} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) + \frac{1}{2}(f_x + if_y)\frac{\overline{\gamma}'(0)}{\gamma'(0)} \tag{1}$$

El ángulo de $\gamma'(0)$ a $\widetilde{\gamma}'(0)$ es el argumento del primer miembro y para que no dependa de γ debe cumplirse $f_x + if_y = 0$. Escribiendo $f = u + iv$ con $u = \Re f$, $v = \Im f$, esta ecuación equivale a las de Cauchy-Riemann, por tanto f es holomorfa.

Veamos finalmente que una función f holomorfa con $f' \neq 0$ es conforme. Para dos arcos con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ definimos $\widetilde{\gamma}_j = f \circ \gamma_j$, $j = 1, 2$. Se tiene $\widetilde{\gamma}_j' = f'\big(\gamma_j(t)\big)\gamma_j'(t)$, por tanto como ni f' ni γ_j' ni $\widetilde{\gamma}_j'$ se anulan, se sigue $\widetilde{\gamma}_2'(t)/\widetilde{\gamma}_1'(t) = \gamma_2'(t)/\gamma_1'(t)$ y de aquí el ángulo de $\gamma_1'(0)$ a $\gamma_2'(0)$ coincide con el ángulo de $\widetilde{\gamma}_1'(0)$ a $\widetilde{\gamma}_2'(0)$. □

El teorema de la función inversa del cálculo en varias variables da condiciones para la existencia de una inversa local diferenciable. El análogo en variable compleja es más fuerte y tiene una prueba más sencilla.

Proposición 1.2. *Si una función biyectiva $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es holomorfa, entonces su función inversa también lo es. En particular f' no se anula en Ω.*

Una función holomorfa inyectiva se transforma en una biyectiva tomando $\Omega' = f(\Omega)$, recuérdese que las funciones holomorfas son siempre abiertas, así que teniendo en cuenta el Teorema 1.1 se deduce:

Corolario 1.3. *Una función holomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ inyectiva es conforme, esto es, su derivada no se anula en Ω.*

Demostración de la Proposición 1.2. Para cada disco D con $\overline{D} \subset \Omega$ existe un disco D' con $\overline{D}' \subset \Omega'$ tal que $\overline{D}' \subset f(D)$, porque f es holomorfa en particular abierta. Además como f es biyectiva, con discos D' de este tipo podemos cubrir todos los puntos de Ω', por tanto basta mostrar que f^{-1} es holomorfa en un D' genérico. La clave es la fórmula

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{zf'(z)}{f(z) - w}\, dz \qquad \text{para} \quad w \in D'. \tag{2}$$

Para obtenerla basta aplicar el teorema de los residuos a $F(z) = zf'(z)/(f(z) - w)$ que tiene un polo en $z = f^{-1}(w)$ con residuo

$$\lim_{z\to f^{-1}(w)} zf'(z)\frac{z - f^{-1}(w)}{f(z) - w} = f^{-1}(w)f'\big(f^{-1}(w)\big) \lim_{z\to f^{-1}(w)} \frac{z - f^{-1}(w)}{f(z) - w} = f^{-1}(w) \tag{3}$$

donde se ha usado la regla de L'Hôpital para la última igualdad. Una vez que tenemos (2) la holomorfía se sigue por ejemplo del teorema de Morera.

Una forma alternativa de proceder (como en [3, §3.2.1]) es utilizar la identidad $(f(z)-w)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(w-w_0)^n/(f(z)-w_0)^{n+1}$ con w_0 el centro de D', que se sigue sumando la progresión geométrica. Sustituida en (2) da un desarrollo en serie convergente para f^{-1}, probando entonces que es analítica. $\square$

Veremos más adelante (Corolario 2.2) que muchos de los abiertos que nos imaginamos admiten una biyección conforme pero lo cierto es que las funciones holomorfas explícitas que conocemos son "pocas" y eso limita bastante los ejemplos.

La exponencial $f(z)=e^z$ aplica las verticales $\Re z=x_0$ en circunferencias de radio e^{-x_0} y las horizontales $\Im z=y_0$ en rayos con una cierta inclinación que se acercan indefinidamente al origen. De esta forma, por ejemplo, f establece una biyección conforme entre

$$\Omega=\big\{0<\Im z<\frac{\pi}{2}\big\} \qquad \text{y} \quad \Omega'=\big\{\Re z,\Im z>0\big\}. \tag{4}$$

Con modificaciones obvias, se obtiene una biyección conforme entre cualquier banda infinita y cualquier sector infinito. Por ejemplo, $f(z)=-ie^{\pi i z}$ aplica la banda $\big\{0<\Re z<1\big\}$ en el semiplano derecho.

Las transformaciones de Möbius de $\mathbb{C}$ permiten aplicar cualquier circunferencia o recta en cualquier circunferencia o recta, según se vio en un curso pasado. Además la inversión $-1/z$ saca lo de dentro afuera y viceversa en $\mathbb{D}$. Con ello se tiene que hay biyecciones conformes entre interiores de discos, exteriores de discos y semiplanos. Todo esto se puede combinar con la exponencial para pasar los semiplanos a sectores.

Ilustremos la situación, buscando una biyección conforme entre el disco $\Omega=\big\{|z-2018|<4\big\}$ y la banda $\Omega'=\big\{0<\Re z<1\big\}$. Con $f_1(z)=(z-2018)/4$ se transforma Ω en $\mathbb{D}$ que nos es más familiar. Para que $\mathbb{D}$ se aplique en un semiplano basta escoger cualquier transformación de Möbius de $\mathbb{C}$ que envíe uno de los puntos de su frontera al infinito. Si tomamos $f_2(z)=(z+1)/(1-z)$, se tiene $f_2(\mathbb{D})=\big\{\Re z>0\big\}$, para comprobarlo basta ver que $f_2(i)$, $f_2(-i)$ son imaginarios puros y $f_2(0)\in\big\{\Re z>0\big\}$. Finalmente, pasamos el semiplano derecho a Ω' tomando la inversa de la aplicación del ejemplo anterior, $f_3(z)=(i\pi)^{-1}\log(iw)$ donde la determinación del ángulo se escoge por ejemplo en $(0,2\pi)$. En definitiva, la función buscada es

$$f=f_3\circ f_2\circ f_1:\Omega\longrightarrow\Omega' \qquad \text{con} \quad f(z)=\frac{1}{\pi i}\log\Big(i\frac{z-2014}{2022-z}\Big). \tag{5}$$

La llamada *transformación de Schwarz-Christoffel* [1] es una función en forma integral que permite aplicar $\mathbb{D}$ en cualquier polígono. Por dar una idea, en el caso particular de un polígono regular de n lados de cierto lado, la función es

$$f(z)=\int_0^z(1-w^n)^{-2/n}\,dw. \tag{6}$$

En los casos $n=3$ y $n=4$ salen integrales elípticas y por eso no es de extrañar que con funciones elípticas se puedan aplicar de manera conforme algunos triángulos y cualquier rectángulo en $\mathbb{D}$ pero no estudiaremos eso aquí.

2. El teorema de la aplicación de Riemann

En el tema anterior, con el teorema de Bloch, hemos visto que el "grosor" de la imagen de las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ está bajo control a través de un solo número, $|f'(0)|$. Esto lleva a pensar que quizá no hay tantas posibilidades para tales imágenes. El resultado principal de este capítulo es un famoso teorema de Riemann que afirma justamente lo contrario.

Teorema 2.1 (Teorema de la aplicación de Riemann)**.** *Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, existe una función holomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ con inversa holomorfa. Además esta función es única si dado $a \in \Omega$ imponemos $f(a) = 0$ y que $f'(a)$ sea real y positivo.*

Excluir el caso $\Omega = \mathbb{C}$ viene de que f contradiría el teorema de Liouville.

Por el Corolario 1.3, f' no se anula en Ω. Considerando $f_2^{-1} \circ f_1$ con f_1 y f_2 como en el teorema para dos abiertos, se tiene:

Corolario 2.2. *Dados Ω y Ω' simplemente conexos distintos de $\mathbb{C}$, existe una biyección conforme entre ellos.*

Antes de pasar a la prueba del Teorema de la aplicación de Riemann, hagamos algunas reducciones.

En primer lugar, basta probar la existencia porque si hubiera dos funciones f_1 y f_2 con las propiedades indicadas, el Lema de Schwarz implica $|h'(0)| \le 1$ y $\big|(h^{-1})'(0)\big| \le 1$ para $h = f_1 \circ f_2^{-1}$, así que $|h'(0)| = 1$ y $h(z) = e^{i\alpha}z$. De $f_1'(a), f_2'(a) > 0$ se sigue $h(z) = z$, esto es, $f_1 = f_2$.

Por otro lado, la Proposición 1.2 muestra que es suficiente probar que f es holomorfa y biyectiva.

Finalmente, con una transformación del tipo $Az + B$ siempre podemos aplicar a en 1 y conseguir que 0 no esté en la imagen de Ω, por tanto es legítimo suponer $0 \notin \Omega$ y $a = 1$.

3. Demostración del teorema de la aplicación de Riemann

Originalmente Riemann procedió interpretando el teorema como un problema de ecuaciones en derivadas parciales. En rigor, con los conocimientos de su tiempo no estaba totalmente claro que tal problema tuviera solución [4]. En la actualidad en prácticamente todos los textos se utiliza en su lugar un argumento puramente de variable compleja basado en el teorema de Montel. Para su aplicación se considera la siguiente familia de funciones

$$\mathcal{F} = \big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{D} \quad \text{holomorfa e inyectiva con } f(1) = 0 \big\}. \tag{7}$$

Las tres propiedades fundamentales que emplearemos están recogidas en los siguientes lemas:

Lema 3.1. *Se cumple $\mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Lema 3.2. *La familia $\mathcal{F}$ es normal.*

Lema 3.3. *Si el supremo de $\big\{|f'(1)| \ : \ f \in \mathcal{F}\big\}$ es un máximo, esto es, si se alcanza para cierta $f \in \mathcal{F}$, entonces $f(\Omega) = \mathbb{D}$.*

Demostración del Lema 3.1. Como Ω es simplemente conexo y no contiene al cero (por las reducciones), es posible definir un logaritmo en Ω y con él una raíz cuadrada $r(z) = \sqrt{z} = \exp\big(\frac{1}{2}\log z\big)$ holomorfa, que claramente es inyectiva. Cambiando su signo si es necesario, podemos suponer $r(1) = 1$. Sea $\mathbb{D}(1,\delta)$ un disco abierto centrado en 1 contenido en (el abierto) $r(\Omega)$. Si $w \in \mathbb{D}(1,\delta)$ entonces $-w \notin r(\Omega)$ porque $r(z_1) = w$, $r(z_2) = -w$ llevan a una contradicción al elevar al cuadrado. De ello se deduce $\mathbb{D}(-1,\delta) \cap r(\Omega) = \emptyset$ y en consecuencia $F(z) = \delta/\big(r(z)+1\big)$ define una función holomorfa inyectiva $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ y considerando $f = S_{F(1)} \circ F$, con $S_{F(1)}$ la correspondiente transformación de Möbius, conseguimos $f(1) = 0$. $\square$

Demostración del Lema 3.2. Es consecuencia inmediata del teorema de Montel. $\square$

Demostración del Lema 3.3. Si la f que da el máximo no cumpliera $f(\Omega) = \mathbb{D}$, existiría $z_0 \in \mathbb{D} - f(\Omega)$. Consideremos $T : f(\Omega) \longrightarrow \mathbb{D}$ dada por $T(z) = S_{w_0}\big(\sqrt{S_{z_0}(z)}\big)$ donde se ha utilizado la notación de las transformaciones de Möbius $S_a(z) = (z-a)/(1-\bar{a}z)$, $w_0 = \sqrt{-z_0}$ y las raíces están bien definidas por estar en un simplemente conexo. La función T es inyectiva por ser composición de funciones inyectivas.

Suponiendo $|T'(0)| > 1$ se sigue que $g = T \circ f \in \mathcal{F}$, porque $T(0) = 0$, y la regla de la cadena asegura $|g'(1)| > |f'(1)|$, contradiciendo que $|f'(1)|$ es maximal.

La cota $|T'(0)| > 1$ se puede obtener por un cálculo directo pero es más fácil notar que $T^{-1}(z) = S_{-z_0}\big(\big(S_{-w_0}(z)\big)^2\big)$ define una función $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ con $T^{-1}(0) = 0$ y el Lema de Schwarz implica $\big|(T^{-1})'(0)\big| < 1$ que equivale a $|T'(0)| > 1$. $\square$

Demostración del Teorema 2.1. Recordemos que gracias a las reducciones suponemos $a = 1$ y solo nos ocupamos de la existencia.

Consideremos el supremo, digamos s, mencionado en el Lema 3.3. Se tiene $s \neq 0$ por el Corolario 1.3. Por definición, existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ tal que $|f_n'(1)| \to s$. Por el Lema 3.2, tal sucesión tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformemente sobre compactos, obviamente $|f_{n_k}'(1)| \to s$. Por el teorema de Weierstrass, la función $f = \lim f_{n_k}$ es holomorfa y $f_{n_k}' \rightrightarrows f'$ sobre compactos. Por el teorema de Hurwitz f es también inyectiva, por tanto $f \in \mathcal{F}$ y estamos en las hipótesis del Lema 3.3, del que se deduce que f es biyectiva. $\square$

Referencias

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[2] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex variables and applications.* McGraw-Hill Book Co., New York, fourth edition, 1984.

[3] J. L. Fernández Pérez. *Variable Compleja IIϵ.* 2018. La versión preliminar de algunos capítulos se pueden descargar de `www.uam.es/fernando.chamizo`.

[4] R. E. Greene and K.-T. Kim. The Riemann mapping theorem from Riemann's viewpoint. *Complex Anal. Synerg.*, 3(1):Paper No. 1, 11, 2017.