Recordando la Variable Compleja I

Fernando Chamizo

24 de enero de 2018

1. Logaritmos e integrales

En 1811 Gauss escribió una carta a Bessel que muestra que ya conocía el teorema de Cauchy para funciones holomorfas, unos 30 años antes de que Cauchy lo incluyese en un famoso trabajo fundacional, y que tenía una idea bastante avanzada para su tiempo de la variable compleja aunque no había publicado nada al respecto.

Una de las cosas que menciona en esa carta (reproducida parcialmente en [3, p.127]) es el carácter multivaluado del logaritmo complejo. No hay ninguna función holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$, ni siquiera continua que invierta la exponencial. Sin entrar en detalles, la fórmula para el logaritmo es

$$\log z = \log |z| + i\arg(z) \tag{1}$$

donde $\log |z|$ es el logaritmo real del módulo y $\arg(z)$ es el ángulo. Para definir $\arg(z)$ es necesario escoger una determinación del ángulo, típicamente $(-\pi, \pi)$, que establece un corte en $\mathbb{C}$ en los reales negativos. Con ella

$$\log(-a + i\epsilon) - \log(-a - i\epsilon) = 2\pi i \qquad \text{para } \epsilon \to 0^+ \text{ y cualquier } a > 0. \tag{2}$$

De $(\log z)' = 1/z$, uno infiere que $\int_\gamma z^{-1}\, dz$ debe dar $2\pi i$ por cada vuelta completa que describa γ alrededor del origen en sentido positivo, porque en cada una de esas vueltas debemos atravesar el corte, sea cual sea la determinación del ángulo escogida. Por otro lado, las vueltas en sentido negativo contribuyen $-2\pi i$.

Con otro tipo de potencias negativas z^{-n}, $n > 1$, no aparece ese problema porque su primitiva $(1 - n)^{-1} z^{1-n}$ no es problemática siempre que evitemos el cero.

La idea a tener en mente es que si aspiramos a calcular integrales con primitivas como en Cálculo I entonces $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1)$ no va a ser problemático si f no tiene singularidades del tipo z^{-1}, en particular el resultado será nulo para caminos cerrados, mientras que si tales singularidades existen, la elección del camino tiene una influencia de naturaleza topológica en el resultado. Esta idea hace bastante creíbles los resultados del curso pasado que se recuerdan a continuación. Todos ellos se ilustrarán con ejemplos bastante escuetos. Para quien necesite practicar más, una buena fuente de ejercicios es [2].

2. Algunos resultados fundamentales de Variable Compleja I

Una función *holomorfa* en un punto es una función de variable compleja derivable en tal punto. Es decir, tal que existe

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{3}$$

Hay infinitas direcciones en las que $z = x + iy$ se puede acercar a $z_0 = x_0 + iy_0$. Considerando las posibilidades: $x \to x_0$ con $y = y_0$ fijo e $y \to y_0$ con $x = x_0$ fijo, se llega a que las funciones holomorfas cumplen las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{con} \quad u(x,y) = \Re f(x+iy), \quad v(x,y) = \Im f(x+iy). \tag{4}$$

Ejemplo. Para $f(z) = e^z$, $f(x+iy) = u + iv$ con $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ que satisfacen las ecuaciones (4).

En lo sucesivo, D será un dominio acotado simplemente conexo (un abierto acotado de una pieza y sin agujeros) cuya frontera ∂D es una curva C^∞ o C^∞ a trozos positivamente orientada. Además $\mathcal{U}$ será un abierto que contiene a $\overline{D}$. Para minimizar las consideraciones topológicas, a menudo los textos [1], [4] dan versiones de los resultados en que D o $\mathcal{U}$ o ambos son circunferencias o rectángulos. Con tener estos casos en mente es suficiente para entender el significado de los resultados que siguen.

El más fundamental, anunciado en la carta de Gauss, es el **teorema de Cauchy** que afirma que si f es holomorfa en $\mathcal{U}$ entonces

$$\int_{\partial D} f = 0. \tag{5}$$

Lo cual es una consecuencia del teorema de Green teniendo en cuenta (4). El resultado es de hecho cierto reemplazando ∂D por cualquier curva cerrada regular γ incluida en D. Por cierto, si γ está parametrizada por $x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, recuérdese que se define

$$\int_\gamma f := \int_a^b f\big(x(t) + iy(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\, dt. \tag{6}$$

Ejemplo. La función $f(z)=(z+2018)^{-1}$ es holomorfa en un abierto que incluye el círculo unidad D, y se tiene

$$\int_{\partial D} f = \int_0^{2\pi} \frac{(-\operatorname{sen} t + i\cos t)\; dt}{\cos t + i \operatorname{sen} t + 2018} = \int_0^{2\pi} \frac{-2018 \operatorname{sen} t + i(1+2018\cos t)}{(\cos t+2018)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\; dt.$$

Según el teorema de Cauchy, esta integral se anula. Para la parte real es bastante obvio mientras que para la imaginaria no es fácil verlo directamente.

Hay una especie de recíproco del teorema de Cauchy que sirve para probar que ciertas funciones definidas de una manera extraña (típicamente a través de series o integrales) son holomorfas. El **teorema de Morera** afirma que si (5) se verifica sustituyendo ∂D por cualquier rectángulo contenido en D, entonces f es necesariamente holomorfa en D.

Ejemplo. La función (importante aunque no lo parezca) $f(z)=\int_1^\infty \operatorname{Frac}(x)x^z\; dx$, con $\operatorname{Frac}(x)$ la parte fraccionaria, es holomorfa en el disco $D=\{|z+4|<1\}$, por el teorema de Morera, ya que no hay problema al intercambiar las integrales y decir que sobre rectángulos x^z integral cero por el teorema de Cauchy, sea cual sea $x\ge 1$. Aquí x^z se define como $e^{z\log x}$. El mismo argumento permite probar que f es de hecho holomorfa en $\Re(z)<-1$.

Pasemos ahora al caso en que hay singularidades. El caso más sencillo es en el que hay un denominador lineal. La **fórmula integral de Cauchy** asegura que si f es holomorfa en $\mathcal{U}$, para cualquier $z_0\in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}\; dz. \tag{7}$$

La prueba pasa por restar $f(z_0)/(z-z_0)$ para eliminar la singularidad.

Ejemplo. La integral real $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-2\cos t}$ se puede escribir como $\int_{\partial D}\frac{dz/iz}{3-(z+z^{-1})}$ con D el círculo unidad, lo cual se reescribe como $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-r}dz$ con $r=(3-\sqrt{5})/2$ y $f(z)=2\pi/(r^{-1}-z)$. Por tanto la integral inicial es $f(r)=2\pi/\sqrt{5}$ gracias a (7). Obtener este resultado a través de primitivas como en Cálculo I es laborioso.

Derivando con respecto a z_0 bajo el signo integral en (7), se tiene que una función holomorfa como f no solo tiene una derivada en un abierto, como se exigió en la definición (3), sino que tiene infinitas. Expresando $(z-z_0)^{-1}$ como una serie se prueba más todavía, **las funciones holomorfas en un abierto son analíticas**. Es decir en un entorno de cada punto coinciden con la serie dada por su desarrollo de Taylor. Esto tiene diversas consecuencias respecto a los ceros de una función holomorfa en un abierto, no pueden tener un punto de acumulación (en dicho abierto) y siempre tienen orden entero. Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ se llama *radio de convergencia* a

$$R = 1/\operatorname{lím\,sup}|a_n|^{1/n} \qquad \text{(que coincide con } \operatorname{lím} a_n/a_{n+1} \text{ si este existe).} \tag{8}$$

En $|z - z_0| < R$ la serie converge uniformemente y define una función holomorfa. Además R es óptimo, no se puede tomar un R mayor con esta propiedad.

Ejemplo. Usando que $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, la función $f(z) = z^{-2} \operatorname{sen}(z^2)$ extendida con $f(0) = 1$ es una función holomorfa que coincide con $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{4n}$. Como no hay singularidades, su radio de convergencia es $R = \infty$ de donde se deduce $\lim \big((2n+1)!\big)^{-1/4n} = 0$.

Derivando una vez (7) con respecto a z_0 y tomando como D círculos cada vez más grandes, se deduce el **teorema de Liouville**, que si una función *entera* (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) está acotada, entonces es una constante.

Ejemplo. No hay funciones enteras no constantes que satisfagan $f(z) = f(z+1)$ y $f(z) = f(z+i)$ porque si M es el supremo de $|f(z)|$ en el cuadrado unidad, claramente $|f(z)| \le M$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por otro lado, el **principio del módulo máximo** implica que el supremo de $|f(z)|$ con $z \in \overline{D}$ siempre se alcanza para $z \in \partial D$.

Ejemplo. Si P es un polinomio no constante entonces $P(z) = 0$ debe tener raíces (*teorema fundamental del álgebra*) pues en otro caso aplicando el principio del módulo máximo a $f(z) = 1/P(z)$ en un círculo arbitrariamente grande, se deduce $|f(z)| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ que implica que f es idénticamente cero.

Para la generalización de (7) a más singularidades, se consideran funciones f *meromorfas*, esto es, cocientes de funciones holomorfas. El denominador se puede anular y en un entorno de cada uno de esos puntos, llamados *polos*, al dividir las series de Taylor se tendrá un *desarrollo de Laurent*

$$(9) \qquad f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{con} \quad c_{-N} \neq 0.$$

En ese caso se dice que en z_0 hay un polo de orden N. A a_{-1} se le llama el *residuo* en z_0 y se suele denotar con $\operatorname{Res}(f, z_0)$. Si f es una función meromorfa en $\mathcal{U}$ y todos sus polos cumplen $z_1, z_2, \dots, z_p \in D$, entonces el **teorema de los residuos** asegura

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Ejemplo. Para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx$ pensamos que es la parte real de $I_R = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx$ con $f(x) = \frac{e^{ix}}{x^2+1}$ cuando $R \to \infty$. Si $D_R = \big\{|z| < R,\ \Im(z) > 0\big\}$, entonces $I_R = \int_{\partial D_R} f(z)\, dz - \int_{S_R} f(z)\, dz$ con S_R la semicircunferencia que compone ∂D_R. Claramente $\big|\int_{S_R} f(z)\, dz\big| \le |S_R| \sup_{z \in S_R} |f(z)| \le \pi R/(R^2+1)$ que tiende a cero si $R \to \infty$. El residuo en $z = i$ de f es $\frac{e^{-1}}{2i}$ porque $f(z) = \frac{e^{iz}}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i}$. En conclusión la integral inicial es $\Re\big(2\pi i \operatorname{Res}(f, i)\big) = \pi/e$.

El **principio del argumento** es un resultado en la misma línea, aunque tenga un aspecto diferente. Si f es holomorfa en $\mathcal{U}$ y todos sus ceros están en D, entonces el número de ceros Z contado con multiplicidades viene dado por la fórmula

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'}{f}. \tag{11}$$

La idea es que un cero de orden k en f permite escribir $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ y al calcular f'/f se obtiene un sumando $k/(z - z_0)$, es decir, un polo con residuo k en z_0. De esta forma, (11) se reduce a (10).

Ejemplo. La integral $\int_{\partial D} \cot z \ dz$ con $D = \{|z| < 5\}$ puede interpretarse como la aplicación del principio del argumento a $f(z) = \sin z$ y por tanto el resultado es $2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$, pues f se anula en $-\pi, 0, \pi \in D$.

Un corolario (no inmediato pero sencillo) de (11) es el **teorema de Rouché**, que dice que si dos funciones f y g holomorfas en $\mathcal{U}$ y con sus ceros en D satisfacen $|g(z)| < |f(z)|$ para $z \in \partial D$, entonces f y $f + g$ tienen la misma cantidad de ceros contando multiplicidades.

Ejemplo. Si queremos calcular el número de raíces en el círculo unidad D de la ecuación de séptimo grado $P(z) = 0$ con $P(z) = z^7 + 2018z^4 + 1000z^3 + 1010$, podemos pensar que es una "perturbación" de $2018z^4 = 0$ que tiene cuatro raíces contando multiplicidades. Concretamente, escogemos en el teorema de Rouché $f(z) = 2018z^4$ y $g(z) = P(z) - f(z)$. Está claro que en ∂D, $|g(z)| \le 1 + 1000 + 1010 = 2011 < |f(z)|$. Por consiguiente la ecuación tiene 4 raíces. Con un poco de álgebra (discriminantes) se puede comprobar que son distintas.

Referencias

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[2] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex variables and applications.* McGraw-Hill Book Co., New York, fourth edition, 1984.

[3] B. L. Laptev, B. A. Rozenfel′d, and A. I. Markushevich. *Mathematics of the 19th century.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. Geometry, analytic function theory, With a bibliography by F. A. Medvedev, Edited and with a preface by A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich, Translated from the 1981 Russian original by Roger Cooke.

[4] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.