Capítulo 5

Convergencia de sucesiones de funciones holomorfas

ALGUNOS HÉROES: Weierstrass, Hurwitz, Ascoli, Arzelà, Vitali, Porter, Montel, Marty, Carathéodory, Bloch, Zalcman, Ros,...

La noción natural de convergencia de sucesiones de funciones holomorfas es la de la convergencia uniforme sobre compactos. Decimos «natural»en el sentido de que ésta es la noción de convergencia (casi mínima) de la que se deriva que los límites heredan propiedades que comparten los términos de las sucesiones. Para este fin, la convergencia en cada punto se quedaría corta, mientras que la convergencia uniforme sobre todo el dominio sería una exigencia excesiva.

Estudiaremos primero esa noción de convergencia uniforme sobre compactos en la situación general de sucesiones de funciones continuas, para, a continuación, abordar el estudio de las sucesiones de funciones holomorfas.

Para un dominio Ω en $\mathbb{C}$ denotaremos por $\mathcal{C}(\Omega)$ al conjunto (espacio vectorial, anillo, álgebra) de las funciones continuas en Ω con valores complejos, y por $\mathcal{H}(\Omega)$ al subconjunto (subespacio vectorial, subanillo, subálgebra) de las funciones holomorfas en Ω.

El teorema fundamental de convergencia para sucesiones de funciones holomorfas es el teorema de Weierstrass que afirma que si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones holomorfas en un dominio Ω que converge *uniformemente sobre compactos de* Ω a una función f, entonces esta función límite f es asimismo holomorfa en Ω. En breve, recordaremos, lector, la demostración de este resultado.

El plan (etiquetado con conspicuos artistas) de este capítulo es el siguiente:

1. Ascoli–Arzelà. Estudiar con detalle la convergencia uniforme sobre compactos para funciones continuas. Destaca aquí el teorema 5.9 de Ascoli–Arzelà, que caracteriza los conjuntos en $\mathcal{C}(\Omega)$ que con la topología asociada son relativamente compactos.

2. Weierstrass. Demostrar el teorema de Weierstrass al que hemos aludido mas arriba, teorema 5.14, y su variante para series de funciones holomorfas.

3. Hurwitz. Detallar, en el apartado 5.4, algunos teoremas de herencia para sucesiones de funciones holomorfas, en otros términos, exhibir conjuntos cerrados relevantes de $\mathcal{H}(\Omega)$.

4. Montel. Estudiar el teorema de Montel, teorema 5.32, que caracteriza las familias relativamente compactas de funciones holomorfas.

5. Marty y Montel–Carathéodory. Finalmente, se aborda el análisis de la convergencia de sucesiones y la normalidad de familias de funciones meromorfas, con la caracterización de Marty de la $\widehat{\mathbb{C}}$-normalidad y el teorema de Montel–Carathéodory sobre la normalidad de la familia de las funciones holomorfas que omiten dos valores fijos.

Nuestro interés por las familias de funciones en $\mathcal{C}(\Omega)$ y en $\mathcal{H}(\Omega)$ relativamente compactas o compactas estriba en que su caracterización permite anticipar si los supremos de ciertos funcionales definidos en $\mathcal{C}(\Omega)$ y en $\mathcal{H}(\Omega)$ son en realidad máximos, es decir, si se alcanzan, para, si es el caso, por argumentos variacionales estudiar las propiedades de ese máximo. Ese será el enfoque, por ejemplo, de la demostración del teorema de la aplicación de Riemann.

☞ **Nota** 5.0.1. ☜ Quizás el lector, inquietamente inquisitivo, se pregunte por qué estudiamos el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$, en general, y por qué no, en una larga cambiada economicista, no se invocan referencias externas de, por ejemplo, análisis funcional o topología general o de análisis, para resultados como el teorema de Ascoli–Arzelà. Es una cuita metodológica (casi logística) razonable. Nuestra principal razón es que resulta muy instructivo analizar y entender el papel de la holomorfía de la fórmula de Cauchy para pasar de la noción de compacidad (relativa) en $\mathcal{C}(\Omega)$ a la de $\mathcal{H}(\Omega)$. Otra es que, por sí mismo, el teorema de Ascoli–Arzelà es un resultado útil y elegante, y es ésta una oportunidad tan buena como otra para apreciarlo. Y otra, hemos de admitirlo, una cierta inveterada lealtad a la tradición. ♠

5.1. Espacio de funciones continuas en un dominio Ω

Definición 5.1 Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(\Omega)$ y sea f una función definida en Ω. Decimos que $(f_n)_{n\geq 1}$ **converge uniformemente sobre compactos de Ω a f** si para todo compacto $K \subset \Omega$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0\,.$$

La función límite f de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ es *necesariamente continua* en todo punto de Ω. Para comprobarlo, fijemos $z \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos un disco $\mathbb{D}(z,r)$ tal que $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(z,r)) \subset \Omega$. Por convergencia uniforme sobre el compacto $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(z,r))$, podemos fijar un entero $N \geq 1$ tal que

$$|f_N(w) - f(w)| \leq \varepsilon/3\,, \quad \text{para todo } w \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(z,r))\,.$$

Como f_N es continua en $z \in \Omega$, existe $\delta > 0$ (que tomamos ya tal que $\delta < r$) de manera que

$$|f_N(w) - f_N(z)| \leq \varepsilon/3\,, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D}(z,\delta)\,.$$

Por tanto, para como $\mathbb{D}(z,\delta) \subset \mathbb{D}(z,r)$, para $w \in \mathbb{D}(z,r)$ se cumple que

$$|f(w) - f(z)| \leq |f(w) - f_N(w)| + |f_N(w) - f_N(z)| + |f_N(z) - f(z)| \leq \varepsilon\,,$$

que nos permite concluir que f es continua en el punto z y, por tanto, en todo Ω.

Con suma frecuencia en lo que sigue, sobre todo para demostrar propiedades que el límite hereda de los términos de la sucesión, se usará una argumentación similar a la que acabamos de emplear: para comparar los valores de una cierta función límite f en dos puntos z y w, se usa una función próxima f_N que se compara con f en z y en w y cuyos valores en z y w se comparan entre sí.

Definición 5.2 Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(\Omega)$ y sea f una función definida en Ω. Decimos que $(f_n)_{n\geq 1}$ **converge puntualmente** a f si se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega\,.$$

La *convergencia uniforme sobre compactos implica la convergencia puntual*, porque si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre compactos a una cierta función f entonces, en particular, $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ para todo $z \in \Omega$, pues para cada $z \in \Omega$ se tiene que el conjunto $\{z\}$ es un compacto en Ω.

Ejemplo 5.1.1 *La convergencia puntual no basta para la convergencia uniforme sobre compactos.*

La sucesión de funciones continuas en $\mathbb{D}$ dada por $f_n(z) = (1 - |z|)^n$, $n \geq 1$, y $z \in \mathbb{D}$, converge puntualmente a la función f tal que $f(0) = 1$ y $f(z) = 0$ si $0 < |z| < 1$. La convergencia, sin embargo, no es uniforme sobre compactos de $\mathbb{D}$; observe el lector, por ejemplo, que la función límite f no es continua. ♣

La noción más exigente de convergencia es la convergencia uniforme sobre todo el dominio.

Definición 5.3 *Una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones de $\mathcal{C}(\Omega)$* ***converge uniformemente en Ω hacia una función*** *f (necesariamente en $\mathcal{C}(\Omega)$) si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Por supuesto, si se tiene convergencia uniforme en todo Ω se tiene convergencia uniforme sobre compactos de Ω.

Ejemplo 5.1.2 *La convergencia uniforme sobre compactos no basta para la convergencia uniforme.*

Consideremos, por ejemplo, la sucesión de funciones en $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ dada por $f_n(z) = z^n$, para $z \in \mathbb{D}$ y entero $n \geq 1$. La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a la función constante 0 uniformemente sobre compactos. Veamos. Si K es un compacto contenido en $\mathbb{D}$ entonces existe $r \in (0, 1)$ tal que $K \subset \mathbb{D}(0, r)$. Para cada $n \geq 1$ se tiene que $\sup_{z\in K} |f_n(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}(0,r)} |f_n(z)| = r^n$. Por tanto, como $r < 1$, se tiene $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z)| = 0$.

Sin embargo, como para cada $n \geq 1$ se tiene que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| = 1$, la sucesión f_n no converge a la función 0 uniformemente en $\mathbb{D}$. ♣

Para una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ y para una función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, la **notación**

$$f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$$

significará que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ tiende a f *uniformemente sobre compactos de* Ω.

Convergencia uniforme sobre compactos como espacio métrico

La mera definición de convergencia uniforme sobre compactos exige una comprobación para cada compacto contenido en Ω, lo que supone una cantidad no numerable de verificaciones. Pero en realidad:

Lema 5.1 *Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos a f si y sólo si $(f_n)_{n\geq 1}$ tiende a f uniformemente sobre discos cerrados $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(z,r)) \subset \Omega$ con centros z con coordenadas racionales y radios r racionales.*

DEMOSTRACIÓN. Si K es compacto $K \subset \Omega$, entonces K se puede cubrir con un número finito de discos $\mathbb{D}(w,s)$ donde $w \in \Omega$ tiene coordenadas racionales y donde s es un número racional con $0 < s < \mathrm{dist}(w, \partial\Omega)$. De la convergencia uniforme en cada $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(w,s))$ se deduce la convergencia uniforme sobre K. El recíproco es obvio, pues los discos cerrados contenidos en Ω son compactos de Ω. ■

Nuestro siguiente objetivo es dotar al espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ de una *distancia* D de manera que la convergencia uniforme sobre compactos de Ω equivalga a la convergencia en el espacio métrico $(\mathcal{C}(\Omega), D)$.

Vamos con ello.

1) Para cada K compacto $K \subset \Omega$, definimos el funcional $p_K \colon \mathcal{C}(\Omega) \mapsto [0,+\infty)$ mediante

$$p_K(f) = \max\{|f(z)|; z \in K\}\,.$$

Obsérvese que para $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$ se tiene que

$$p_K(f+g) \leq p_K(f) + p_K(g)\,,$$

y que además, si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $p_K(\lambda f) = |\lambda|\, p_K(f)$.

Note lector que para $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ se tiene que f_n converge uniformemente hacia f sobre un compacto $K \subset \Omega$ cuando $n \to \infty$ si y solo si $p_K(f_n - f) \to 0$.

2) De cada p_K nos interesa si se hace 0 o si es próximo a 0. Si este es nuestro interés, podemos usar en lugar de $p_K(f)$ a $\min(1, p_K(f))$, o también a $p_K(f)/(1 + p_K(f))$, que tienen la ventaja de que son expresiones acotadas (por 1) y que se anulan cuando se anula $p_K(f)$.

Definimos el funcional $q_K : \mathcal{C}(\Omega) \mapsto [0,1)$ (con valores en $[0,1)$)

$$q_K(f) = \frac{p_K(f)}{1 + p_K(f)}\,.$$

Si $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$, entonces

$$q_K(f+g) \leq q_K(f) + q_K(g)\,.$$

Esto último se sigue de que si $x, y \geq 0$ entonces

$$\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y},$$

y de que $x \in [0,+\infty) \mapsto x/(1+x)$ es creciente.

Note lector que para $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ se tiene que f_n converge uniformemente hacia f sobre un compacto $K \subset \Omega$ cuando $n \to \infty$ si y solo si $q_K(f_n - f) \to 0$.

Pertrechados con los funcionales q_K y con el objetivo de definir esa distancia D que hemos anunciado, pasamos ahora a considerar la colección numerable $\mathcal{K}$ de discos cerrados de centros racionales y con radios racionales que están contenidos en el dominio Ω. Escojamos una enumeración/ordenación $(K_j)_{j\geq 1}$ de $\mathcal{K}$.

Obsérvese que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$ si y sólo si para cada $j \geq 1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} p_{K_j}(f_n - f) = 0$ si y sólo si para cada $j \geq 1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} q_{K_j}(f_n - f) = 0$.

Querríamos amalgamar todos los q_{K_j} en una sola expresión, digamos Q, de manera que $Q(f_n - f) \to 0$ equivaliera a que $q_{K_j}(f_n - f) \to 0$ para cada $j \geq 1$.

Definimos, para cada $f \in \mathcal{C}(\Omega)$,

$$(\star) \qquad Q(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\, q_{K_j}(f)\,.$$

Observe, lector, que Q no es una expresión canónica, pues depende de la ordenación o enumeración de los K_j. Si cambiamos la ordenación de $\mathcal{K}$ obtenemos un funcional Q distinto.

☞ **Nota** 5.1.1. ☜ Si tomásemos como definición de Q a $\widetilde{Q}(f) = \sup_j q_{K_j}(f)$, tendríamos que $\widetilde{Q}(f_n - f) \to 0$ equivaldría a que f_n tiene a f uniformemente sobre todo Ω, y no tan sólo sobre compactos de Ω como buscamos. De hecho $\widetilde{Q}(f) = \delta < 1$ equivale a $\sup\{|f(z)| : z \in \Omega\} \leq \delta(1-\delta)$.

Si tomásemos como definición de Q a $\widetilde{Q}(f) = \sum_j q_{K_j}$, tendríamos $Q(f) = +\infty$ para ciertas $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. ♠

Para los usos que siguen se podría reemplazar en la definición de Q a la sucesión de coeficientes positivos $1/2^j$ por cualquier otra sucesión de términos positivos cuya suma fuera finita.

Con la presente especificación $(\star)$ del funcional Q se tiene que $0 \leq Q(f) < 1$ para cualquier f. Además, si $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$ entonces

$$Q(f+g) \leq Q(f) + Q(g)\,.$$

Lema 5.2 *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{C}(\Omega)$ y sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Entonces $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} Q(f_n - f) = 0$.*

demostración. Para cualquier $m \geq 1$ se tiene que

$$(\dagger) \qquad q_{K_m}(f_n - f) \leq Q(f_n - f) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^j}\, q_{K_j}(f_n - f) + \frac{1}{2^m}\,.$$

Si $Q(f_n - f) \to 0$ entonces, por $(\dagger)$, se tiene que $q_{K_m}(f_n - f) \to 0$ para cada $m \geq 1$ y, por tanto, se tiene convergencia uniforme sobre cada compacto $K_m \in \mathcal{K}$ y, por tanto, sobre cada compacto $K \subset \Omega$ y, por consiguiente, $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$.

Si $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$ entonces $q_{K_j}(f_n - f) \to 0$ para cada $j \geq 1$. Fijemos $m \geq 1$; de (†) se deduce que

$$\limsup_{n\to\infty} Q(f_n - f) \leq \frac{1}{2^m}\,,$$

y como esto es válido para todo $m \geq 1$, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} Q(f_n - f) = 0\,,$$

como se quería probar. ■

Provistos de este funcional Q, ya estamos en disposición de definir una distancia D en $\mathcal{C}(\Omega)$ cuya topología asociada es justamente la de la convergencia uniforme sobre compactos.

Definición 5.4 Para $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$ se define $D(f, g) = Q(f - g)$.

Observe, lector, que la distancia D es invariante por traslaciones: $D(f+h, g+h) = D(f, g)$ para cualesquiera $f, g, h \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Como recogemos en el siguiente lema, la distancia D da en $\mathcal{C}(\Omega)$ la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Insistimos en que una reordenación de la familia $\mathcal{K}$ nos daría una distancia D distinta.

Lema 5.3 *D define una distancia en $\mathcal{C}(\Omega)$. Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ converge a una función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ en el espacio métrico $(\mathcal{C}(\Omega), D)$ si y sólo si $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$.*

DEMOSTRACIÓN. La segunda parte se sigue del lema 5.2 y de que $D(f_n, f) \to 0$ equivale a que $Q(f_n - f) \to 0$.

Obsérvese que $D(f, g) \geq 0$ y que $D(f, g) = D(g, f)$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$. Además, si $D(f, g) = 0$, entonces $Q(f - g) = 0$, de donde $f \equiv g$ en cada K_j y por tanto $f \equiv g$ en todo Ω.

La desigualdad triangular de D se sigue de que si $f, g, h \in \mathcal{C}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} D(f, h) &= Q(f - h) \\ &= Q\big((f - g) + (g - h)\big) \leq Q(f - g) + Q(g - h) = D(f, g) + D(g, h)\,. \end{aligned}$$ ■

Observe, lector, que el diámetro del espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ con la distancia D es 1.

El siguiente lema, pura consecuencia de que convergencia uniforme sobre compactos de Ω equivale a convergencia en $(\mathcal{C}(\Omega), D)$ es un espacio métrico, es un criterio muy útil.

Lema 5.4 *Para verificar que una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente sobre compactos hacia una función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, basta comprobar que cualquier subsucesión de $(f_n)_{n=1}^\infty$ admite una (sub-) subsucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia a f.*

DEMOSTRACIÓN. Por contradicción. Si $(f_n)_{n=1}^\infty$ no tendiera hacia f, existiría una subsucesión $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ y $\delta > 0$ tal que

$$D(f_{n_k}, f) \geq \delta\,, \quad \text{para todo } k \geq 1\,.$$

Pero, entonces, de esta $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ no se podría extraer una subsucesión que convergiera a f. ■

Terminología de familias. En el presente contexto, para referirse a conjuntos de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ es tradicional usar el acogedor término de **familia**. Por ejemplo, la familia de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que son inyectivas o la familia de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que no se anulan o ...

Ya puestos, usaremos este término de familia también para subconjuntos de $\mathcal{C}(\Omega)$.

☞ **Nota** 5.1.2. ☜ En ciertos otros contextos se usa el término más militante de «clase», en lugar del de «familia», tan entrañable, como la clase $\mathcal{S}$ de las funciones holomorfas e inyectivas en $\mathbb{D}$, normalizadas por $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. ♠

5.1.1. Familias relativamente compactas y familias compactas

Nos interesará en lo que sigue estudiar muy principalmente aquellas familias $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ (y sobre todo de $\mathcal{H}(\Omega)$) que son **relativamente compactas**, es decir, aquellas familias cuya clausura en el espacio métrico $(\mathcal{C}(\Omega), D)$ es compacta.

Tome nota, lector, de que como $\mathcal{C}(\Omega)$ es espacio métrico, una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ es relativamente compacta si y sólo si de cualquier sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión convergente a una función de $\mathcal{C}(\Omega)$, aunque ese límite no necesariamente será de la familia $\mathcal{F}$.

Una **familia compacta** es una familia cerrada y relativamente compacta.

Advierta, lector, que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ es compacta si y sólo si de cualquier sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión convergente a una función de $\mathcal{F}$.

El siguiente ejemplo ilustra y anticipa el porqué de nuestro interés en las familias relativamente compactas.

EJEMPLO 5.1.3 *Función holomorfa definida en un dominio Ω con valores en $\mathbb{D}$ y con máxima derivada en un punto dado $z_0 \in \Omega$.*

Fijemos $z_0 \in \Omega$ y consideramos la familia $\mathcal{F}$ de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$ y que $f(z_0) = 0$.

☞ **Nota** 5.1.3. ☜ Quizás esta familia se reduzca a las constantes. Este es el caso, por ejemplo, cuando $\Omega = \mathbb{C}\setminus A$ donde A es un conjunto finito de $\mathbb{C}$, como consecuencia del teorema de singularidad evitable y del teorema de Liouville. ♠

Nos interesa obtener la función $f \in \mathcal{F}$ para la que $|f'(z_0)|$ sea máximo. Como sabemos, por el lema de Schwarz, para cada $f \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$|f'(z_0)| \leq 1/\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)\,.$$

Esto nos dice que $L = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)|$ es finito, de hecho, $L \leq 1/\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

En la discusión que sigue anticiparemos liberalmente resultados y argumentos que detallaremos en lo que sigue.

Podemos encontrar una sucesión dentro de la familia $\mathcal{F}$, digamos $(f_n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |f_n'(z_0)| = L$.

Como consecuencia del teorema de Montel (que discutiremos más adelante, véase el teorema 5.32), se tiene que la familia $\mathcal{F}$ es relativamente compacta, así que extrayendo una subsucesión convergente (uniformemente sobre compactos) podemos suponer que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$, donde f es una función holomorfa en Ω.

Por convergencia puntual (que se sigue de que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$), se tiene que $|f(z)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(z)|$ para cada $z \in \Omega$, y, por tanto, que $f(\Omega) \subset \operatorname{cl}(\mathbb{D})$.

Asimismo de que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$ se sigue (esto es parte del teorema de convergencia de Weierstrass) que $f_n' \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$ y, por tanto, que $|f'(z_0)| = L$. Si $L > 0$, entonces f no es constante y $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$, por el principio del módulo máximo. Así que obtenemos una función $f \in \mathcal{F}$ para la que se tiene máxima derivada. Esto ayudará[1] a identificar f, o alguna de sus propiedades, con argumentos variacionales. ♣

El teorema 5.9 de Ascoli–Arzelà da un criterio práctico para decidir si una familia en $\mathcal{C}(\Omega)$ es relativamente compacta. El teorema 5.32 de Montel *adapta* el criterio de Ascoli–Arzelà para familias de $\mathcal{H}(\Omega)$.

5.1.2. Equicontinuidad y acotación uniforme (sobre compactos)

En este apartado discutimos dos propiedades de familias de $\mathcal{C}(\Omega)$:

A. acotación uniforme sobre compactos,
B. equicontinuidad sobre compactos,

que son ingredientes esenciales del anunciado teorema de Ascoli–Arzelà.

A. Acotación uniforme sobre compactos

Definición 5.5 Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de $\mathcal{C}(\Omega)$ se dice **uniformemente acotada sobre compactos** de Ω si para todo compacto $K \subset \Omega$ se tiene que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} p_K(f) < +\infty\,.$$

En otros términos, *la familia $\mathcal{F}$ es o está uniformemente acotada sobre compactos si y sólo si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una constante C_K tal que*

$$|f(z)| \leq C_K\,, \quad \text{para todo } z \in K \text{ y todo } f \in \mathcal{F}\,.$$

[1] Ya se sabe que la existencia es una buena virtud. ¡Salve, Anselmo!

Puesto que cada compacto se puede cubrir con un número finito de discos cerrados contenidos en Ω, la definición de familia uniformemente acotada sobre compactos no se ve alterada si en ella substituimos los compactos generales por discos cerrados (contenidos en Ω). Con este mismo razonamiento, se comprueba que una familia $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre compactos si y sólo si está **localmente uniformemente acotada**, es decir, si para todo $z \in \Omega$ existe un radio positivo $r < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ tal que $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en $\mathbb{D}(z, r)$, es decir,

$$\sup\{|f(w)| : w \in \mathbb{D}(z, r),\ f \in \mathcal{F}\} < +\infty\,.$$

Lema 5.5 *Toda familia $\mathcal{F}$ relativamente compacta en $\mathcal{C}(\Omega)$ está uniformemente acotada sobre compactos.*

DEMOSTRACIÓN. Por reducción al absurdo: supongamos que $\mathcal{F}$ no está uniformemente acotada sobre compactos. Entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ y para cada $n \geq 1$ una función $f_n \in \mathcal{F}$ y un punto $z_n \in K$ tal que $|f_n(z_n)| \geq n$. Como $\mathcal{F}$ es relativamente compacta podemos suponer (extrayendo una subsucesión si acaso fuera necesario) que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} g$, para una cierta $g \in \mathcal{C}(\Omega)$, en particular que $\lim_{n\to\infty} p_K(f_n - g) = 0$.

Ahora

$$|g(z_n)| \geq |f_n(z_n)| - |f_n(z_n) - g(z_n)| \geq n - p_K(f_n - g)\,.$$

Como $\lim_{n\to\infty} p_K(f_n - g) = 0$, por convergencia uniforme sobre el compacto K y como $\lim_{n\to\infty} |f_n(z_n)| = +\infty$, concluimos que $\lim_{n\to\infty} |g(z_n)| = +\infty$. Esto supone, claro, una contradicción pues afirma que la función continua g no está acotada en el compacto K. ■

EJEMPLO 5.1.4 *Una familia de $\mathcal{C}(\Omega)$ que está uniformemente acotada sobre compactos pero que no es relativamente compacta.*

Tomemos $\Omega = \mathbb{C}$, y para cada $n \geq 1$ definamos la función continua $f_n(z) = \min(1, |z|^n)$, para $z \in \mathbb{C}$.

Como familia $\mathcal{F}$ tomamos la propia sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$. Obviamente $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre compactos, pues, de hecho, está uniformemente acotada en módulo por 1 en todo $\mathbb{C}$. La sucesión f_n converge puntualmente a la función h dada por

$$h(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } |z| \geq 1\,, \\ 0, & \text{si } |z| < 1\,. \end{cases}$$

Como el único límite uniforme sobre compactos posible de cualquier subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$ es la función h, que no es continua, deducimos que ninguna tal subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$ tiene límite. En conclusion, la familia $\mathcal{F}$ no es relativamente compacta.♣

Definición 5.6 Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ es o está **puntualmente acotada** si

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(z)| < +\infty\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega\,.$$

Obviamente, toda familia uniformemente acotada sobre compactos está puntualmente acotada.

EJEMPLO 5.1.5 *Una familia puntualmente acotada pero que no está uniformemente acotada sobre compactos.*

Tomamos como $\Omega = \mathbb{C}$.

Para cada $n \geq 1$ definimos la función

$$f_n(z) = n^2\Big(\frac{1}{n} - \Big|\frac{1}{n} - z\Big|\Big)^+, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Cada f_n es una función continua en todo $\mathbb{C}$.

Tome nota lector de que la función f_n se anula fuera del disco $\mathbb{D}(1/n, 1/n)$ y que en el centro de ese disco vale $f_n(1/n) = n$.

Sea $\mathcal{F}$ la familia $\mathcal{F} = \{f_n; n \geq 1\}$ conformada por las funciones f_n.

La familia $\mathcal{F}$ no está uniformemente acotada sobre compactos de $\mathbb{C}$, puesto que $f_n(1/n) = n$, para $n \geq 1$.

La familia $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada. Veamos. Si $z \neq 0$, entonces $f_n(z) = 0$, para $n > 1/(2|z|)$, y por tanto, $\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(z)| = \sup_{n\geq 1} |f_n(z)| < +\infty$; mientras que para $z = 0$, tenemos que $f_n(0) = 0$, para cada $n \geq 1$.

Observe, lector, que la sucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ de funciones continuas en $\mathbb{C}$ dadas por

$$g_n(z) = n^2\Big(\frac{1}{n} - |z|\Big)^+, \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \text{ y entero } n \geq 1\,,$$

análoga a la anterior, ¿verdad, lector?, a) no está uniformemente acotada sobre compactos puesto que $g_n(0) = n$, para $n \geq 1$, b) está puntualmente acotada en todo $z \neq 0$ pues para $n \geq 1/|z|$ se tiene que $g_n(z) = 0$, c) y, claro, $z = 0$ no está puntualmente acotada, pues de nuevo, $g_n(0) = n$, para $n \geq 1$. ♣

B. Equicontinuidad sobre compactos

Definición 5.7 Una familia $\mathcal{F}$ de funciones en $\mathcal{C}(\Omega)$ se dice **equicontinua sobre compactos** de Ω si para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon\,, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F} \text{ y cualesquiera } z, w \in K, |z - w| \leq \delta\,.$$

Toda función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ es automáticamente uniformemente continua sobre cada compacto $K \subset \Omega$. La equicontinuidad exige que las cotas de continuidad uniforme (sobre K) de todas las funciones de la familia $\mathcal{F}$ sean las mismas.

Por mor de mantener paralelismo y consistencia con la terminología de la acotación uniforme podría hablarse (pero no lo haremos) de familia uniformemente uniformemente[2] continua sobre compactos. O, alternativamente, referirnos a la acotación uniforme sobre compactos como equiacotación sobre compactos (que tampoco seguiremos).[3]

[2] Sic, doble "uniformemente". A rose is a rose is a rose.

[3] Adherencia incondicionalmente leal a la tradición terminológica, ... casi siempre.

Al igual que en el caso de la acotación uniforme, para verificar la equicontinuidad sobre compactos basta restringirse a los discos cerrados contenidos en Ω (propiedad a lo que nos referimos, tan sólo durante unas líneas, como equicontinuidad sobre discos cerrados). Pero la comprobación de esta simplificación no es ahora tan directa como en lo fue en el caso de la acotación y la recogemos en el lema siguiente.

Lema 5.6 *Sea $\mathcal{F}$ una familia en $\mathcal{C}(\Omega)$. Si la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre discos cerrados contenidos en Ω entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre compactos.*

Un compacto se cubre con un número finito de discos, en cada uno de los cuales se tendría equicontinuidad: todo lo que hay que verificar es que si dos puntos de K son próximos entonces han de pertenecer a un único disco de esos discos. Esta es la idea. Vamos con ella.

demostración. Sea K compacto $K \subset \Omega$. Tomemos $d = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. Como

$$K \subset \bigcup_{z \in K} \mathbb{D}(z, d/3)\,,$$

y K es compacto podemos hallar $z_1, z_2, \ldots, z_n \in K$ tales que

$$(\star) \qquad K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathbb{D}(z_j, d/3)\,.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Por hipótesis de equicontinuidad, para cada uno de los discos $\operatorname{cl}(\mathbb{D}(z_j, 2d/3))$ podemos elegir $\delta_j > 0$ tal que si $z, w \in \operatorname{cl}(\mathbb{D}(z_j, 2d/3))$ y si $|z-w| \leq \delta_j$ entonces

$$(\star\star) \quad |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon\,, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F}\,.$$

Tomamos ahora $\delta = \text{mín}\big(d/3, \text{mín}_{1 \leq j \leq n}\{\delta_j\}\big)$.

Sean ahora $z, w \in K$ con $|z - w| \leq \delta$. Para completar la demostración vamos a comprobar que $|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$, para cualquier $f \in \mathcal{F}$.

Por $(\star)$ tenemos que $z \in \mathbb{D}(z_j, d/3)$ para algún j con $1 \leq j \leq n$ y como $|z - w| \leq d/3$, tenemos entonces que $w \in \mathbb{D}(z_j, 2d/3)$.

Como además $|z-w| \leq \delta \leq \delta_j$, por $(\star\star)$ tenemos finalmente que $|f(z)-f(w)| \leq \varepsilon$, para cualquier $f \in \mathcal{F}$. ∎

De hecho, con ese mismo argumento se comprueba que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ es equicontinua sobre compactos si y sólo es **localmente equicontinua**, es decir, si para todo $a \in \Omega$ existe un $r > 0$, tal que $\mathcal{F}$ es equicontinua en el disco $\mathbb{D}(a, r)$.

Lema 5.7 *Toda familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ relativamente compacta es equicontinua sobre compactos de Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Si la familia $\mathcal{F}$ no fuera equicontinua sobre compactos, existiría un compacto $K \subset \Omega$, un $\varepsilon > 0$, dos sucesiones $(z_n)_{n\geq 1}$ y $(w_n)_{n\geq 1}$ de puntos de K con $\lim_{n\to\infty} |z_n - w_n| = 0$ y una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones de $\mathcal{F}$ tales que

$$|f_n(z_n) - f_n(w_n)| \geq \varepsilon\,.$$

Como $\mathcal{F}$ es relativamente compacta podemos suponer (extrayendo una subsucesión si fuera menester) que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$ para una cierta $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Como K es compacto, podemos suponer (tomando subsucesiones si fuera menester) que ambas sucesiones $(z_n)_{n\geq 1}$ y $(w_n)_{n\geq 1}$ son convergentes, necesariamente a un mismo punto $a \in K$, pues $\lim_{n\to\infty} |z_n - w_n| = 0$.

Para cada $n \geq 1$, se tiene

$$|f(z_n) - f(w_n)| \geq |f_n(z_n) - f_n(w_n)| - 2p_K(f_n - f) \geq \varepsilon - 2p_K(f_n - f)\,.$$

Como $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} p_K(f_n - f) = 0$ y, por tanto, se deduce que

$$\liminf_{n\to\infty} |f(z_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon\,,$$

que contradice la continuidad de f en a. ■

EJEMPLO 5.1.6 *Familia de $\mathcal{C}(\Omega)$ equicontinua sobre compactos, pero no relativamente compacta.*

La familia de las funciones constantes es, obviamente, equicontinua sobre compactos, pero no es relativamente compacta, pues, por ejemplo, ninguna subsucesión de la sucesión $f_n \equiv n$ donde $n \geq 1$ tiene límite (en $\mathcal{C}(\Omega)$). ♣

La siguiente proposición resultará particularmente útil en ocasiones; será, por ejemplo, un ingrediente básico en la demostración del teorema de Ascoli–Arzelà.

Proposición 5.8 *Sea $\mathcal{F}$ una familia en $\mathcal{C}(\Omega)$ equicontinua sobre compactos y $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de $\mathcal{F}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existe en $\mathbb{C}$ para cada $z \in \Omega$.*

Definamos una función g en Ω mediante $g(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. Entonces

$$f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} g\,,$$

y, en particular $g \in \mathcal{C}(\Omega)$.

En otros términos, *para familias equicontinuas sobre compactos la convergencia puntual y la convergencia uniforme son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un compacto $K \subset \Omega$. Veamos que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniforme a g en K. Como esto será válido para todo tal compacto, la prueba estará completa.

Denotemos por d a la distancia $d = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Como K es compacto, tenemos que $d > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por equicontinuidad sobre compactos, existe $\delta > 0$, que podemos tomar ya menor que d, tal que

$$|f_n(z) - f_n(w)| \le \varepsilon\,, \quad \text{si } z, w \in K \text{ con } |z - w| \le \delta\,.$$

Cubramos K con un número finito de discos de radio δ y con centros en K, digamos $\mathbb{D}(a_j, \delta)$, con $1 \le j \le M$, de manera que $K \subset \bigcup_{j=1}^{M} \mathbb{D}(a_j, \delta)$.

Sea $w \in K$ y digamos que $w \in \mathbb{D}(a_j, \delta)$ con $1 \le j \le M$, entonces para enteros $1 \le n \le m$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f_n(w) - f_m(w)| &\le |f_n(w) - f_n(a_j)| + |f_n(a_j) - f_m(a_j)| + |f_m(a_j) - f_m(w)| \\ &\le 2\varepsilon + |f_n(a_j) - f_m(a_j)|\,. \end{aligned}$$

Si hacemos $m \uparrow +\infty$, se deduce que

$$|f_n(w) - g(w)| \le 2\varepsilon + |f_n(a_j) - g(a_j)|\,.$$

Por tanto, para todo $n \ge 1$, se tiene que

$$\sup_{w \in K} |f_n(w) - g(w)| \le 2\varepsilon + \max_{1 \le j \le M} |f_n(a_j) - g(a_j)|\,.$$

Para cada $1 \le j \le M$, como $\lim_{n\to\infty} f_n(a_j) = g(a_j)$, tenemos un entero $N_j \ge 1$ tal que

$$|f_n(a_j) - g(a_j)| \le \varepsilon\,, \quad \text{si } n \ge N_j\,.$$

Así que si $N = \max_{1 \le j \le M} N_j$, se cumple que

$$\sup_{w \in K} |f_n(w) - g(w)| \le 3\varepsilon\,, \quad \text{para todo } n \ge N.$$

Por consiguiente, la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a g uniformemente sobre el compacto K, como se quería demostrar. ■

5.1.3. Teorema de Ascoli–Arzelà

El teorema que da título a este apartado nos proporciona una caracterización eficiente de la compacidad relativa en $\mathcal{C}(\Omega)$.

Teorema 5.9 (Teorema de Ascoli–Arzelà.) *Para una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$, las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

1) *$\mathcal{F}$ es relativamente compacta,*
2) *$\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre compactos y es equicontinua sobre compactos,*
3) *$\mathcal{F}$ está puntualmente acotada y es equicontinua sobre compactos.*

Obviamente 2) es formalmente más fuerte que 3). Los lemas preparatorios 5.5 y 5.7 ya nos dan que 1) implica 2). Así que resta probar que 3) implica 1). Nótese asimismo que la proposición 5.8 ya da que 3) implica 2).

En la demostración usaremos el siguiente "argumento" diagonal a la Cantor.

Lema 5.10 (Argumento diagonal) *Supongamos que tenemos una matriz infinita* $\mathbf{Z} = \{z(i,j) : 1 \le i, 1 \le j\}$ *de números complejos tales que*

$$\sup_{i\ge 1} |z(i,j)| < +\infty\,, \quad \textit{para todo } j \ge 1\,.$$

Entonces podemos hallar un conjunto infinito $\mathcal{N}$ de enteros positivos que son índices de filas de manera que

$$\lim_{\substack{n\in\mathcal{N};\\ n\to\infty}} z(n,j) \quad \textit{existe}\,, \quad \textit{para cada } j \ge 1.$$

La hipótesis sobre $\mathbf{Z}$ es que cada una de sus columnas es una sucesión acotada. La conclusión sobre $\mathbf{Z}$ es que se puede seleccionar una sucesión de filas de manera que, tras quedarnos sólo con esas filas de $\mathbf{Z}$, *todas* las columnas de $\mathbf{Z}$ convergen.

Si hay tan sólo un número finito k de columnas, el enfoque es natural: como los valores de la primera columna están acotados, podemos elegir $\mathcal{N}_1$ infinito tal que la primera columna restringida a las filas con índices en $\mathcal{N}_1$ converja. De esa sucesión de filas $\mathcal{N}_1$, podemos extraer $\mathcal{N}_2$ infinito, $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$ tal que la segunda columna restringida a $\mathcal{N}_2$ sea convergente. Y así sucesivamente: $\mathcal{N}_k \subset \cdots \subset \mathcal{N}_1$, y nos quedamos con las filas con índice en $\mathcal{N}_k = \bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}_j$.

Cuando hay infinitas columnas este procedimiento puede dejarnos con las manos vacías al final, si lo seguimos a pies juntillas. Por ejemplo, si la primera sucesión de filas $\mathcal{N}_1$ la forman las de posición par, y la segunda sucesión $\mathcal{N}_2$ las de posición par dentro de la primera, y la tercera $\mathcal{N}_3$ las de posición par dentro de la segunda, y así sucesivamente, cuando se llevan n columnas el procedimiento ha dejado sólo las filas que tienen índice múltiplo de 2^n. Y $\cap_{j=1}^\infty \mathcal{N}_j = \emptyset$.

Pero no hay por qué ser tan rígidos en la selección de la sucesión de filas.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 5.10. Aplicamos el procedimiento que acabamos de describir: extraemos, como hemos indicado, una sucesión de conjuntos infinitos de enteros positivos

$$\mathcal{N}_1 \supset \mathcal{N}_2 \supset \mathcal{N}_3 \supset \cdots\,,$$

de manera que para cada $j \ge 1$, es decir, para cada columna, se tiene que

$$(z(n,j))_{n\in\mathcal{N}_j} \quad \text{converge}\,.$$

Si $\mathcal{M} = \bigcap_{j=1}^\infty \mathcal{N}_j$ fuera un conjunto infinito, ya habríamos terminado, pues nos quedaríamos con las filas de índice en $\mathcal{M}$. Veamos. Para cada $j \ge 1$ se tendría que $(z(n,j))_{n\in\mathcal{M}}$ es una subsucesión de $(z(n,j))_{n\in\mathcal{N}_j}$ y por tanto $(z(n,j))_{n\in\mathcal{M}}$ sería convergente.

Pero, como hemos apuntado antes, pudiera ocurrir que esta intersección fuera vacía.

El *truco diagonal* consiste en formar un conjunto (infinito) $\mathcal{N}$ tomando el primer elemento de $\mathcal{N}_1$, el segundo de $\mathcal{N}_2$ y así sucesivamente.

Ahora, para cada $j \geq 1$, la sucesión $(z(n,j))_{n\in\mathcal{N}}$ es subsucesión de $(z(n,j))_{n\in\mathcal{N}}$ *desde* $n = j$ *en adelante, aunque no desde* $n = 1$. Esto nos basta para asegurar que $(z(n,j))_{n\in\mathcal{N}}$ es convergente.

Y esto es todo. ■

demostración del teorema 5.9. Sólo resta probar que 3) implica 1).

Suponemos que la familia $\mathcal{F}$ cumple la condición 3). Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión extraída de $\mathcal{F}$; queremos demostrar que existe una subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$ que converge uniformemente sobre compactos.

El plan es el siguiente: a) la proposición 5.8 nos dice que basta comprobar convergencia puntual, b) el argumento diagonal nos permite obtener una subsucesión que converge puntualmente en cada punto de cualquier conjunto numerable prefijado, y que aquí tomaremos denso en Ω, y c) la equicontinuidad y la densidad, nos permitirán finalmente pasar de la convergencia puntual sobre el conjunto denso a la convergencia puntual en cada punto de Ω.

Vamos con ello.

Tomamos un conjunto $\mathcal{D}$ denso y numerable en Ω. Como para cada $d \in \mathcal{D}$, la sucesión $(f_n(d))_{n=1}^{\infty}$ está acotada, el argumento diagonal de Cantor, lema 5.10, nos permite suponer (extrayendo una sucesión que seguimos denotando como f_n por pura economía notacional que el lector agradecerá) que para cada $d \in \mathcal{D}$ la sucesión $(f_n(d))_{n=1}^{\infty}$ converge.

Vamos a demostrar que para todo $z \in \Omega$ la sucesión $(f_n(z))_{n\geq 1}$ converge.

Esto ya completa la demostración, pues basta apelar (con firmeza no exenta de cariño) a la proposición 5.8 para concluir que, entonces, la (sub-)sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre compactos.

Fijemos $z \in \Omega$. Basta probar que $(f_n(z))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Tomemos $r > 0$ tal que $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(z,r)) \subset \Omega$. Démonos un $\varepsilon > 0$, para usarlo en la verificación de que $(f_n(z))_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

Como la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre compactos, existe $\delta > 0$ (que podemos tomar, y tomamos, $\delta < r$) tal que si $a, b \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(z,r))$ son tales que $|a-b| \leq \delta$ entonces

$$|f_n(a) - f_n(b)| \leq \varepsilon/3\,, \quad \text{para todo } n \geq 1\,.$$

Como $\mathcal{D}$ es denso, podemos tomar $d \in \mathcal{D}$ tal que $|z-d| \leq \delta$. Como la sucesión $(f_n(d))_{n=1}^{\infty}$ es convergente, podemos elegir N tal que

$$|f_n(d) - f_m(d)| \leq \varepsilon/3\,, \quad \text{para todo } n, m \geq N\,.$$

Pero, entonces, para todo $n, m \geq N$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(d)| + |f_n(d) - f_m(d)| + |f_m(d) - f_m(z)| \leq \varepsilon\,.$$

Por consiguiente la sucesión $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por tanto, convergente, como queríamos ver. ■

Obsérvese que como corolario de la demostración se obtiene el siguiente resultado, que mejora asaz ligeramente la proposición 5.8:

Corolario 5.11 *Sea $\mathcal{D}$ un conjunto denso en Ω y $\mathcal{F}$ una familia de $\mathcal{C}(\Omega)$ equicontinua sobre compactos. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de $\mathcal{F}$ tal que para todo $d \in \mathcal{D}$ existe el límite de la sucesión $(f_n(d))_{n\geq 1}$, entonces la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathcal{C}(\Omega)$, es decir, converge uniformemente sobre compactos de Ω.*

EJEMPLO 5.1.7 *Fijemos un dominio Ω. Consideremos la familia $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ de funciones $\underline{u}$ diferenciables con diferencial continua y tales que*

$$|u(z)| + \|\nabla u(z)\| \leq 1\,, \textit{para todo } z \in \Omega\,.$$

La familia $\mathcal{U}$ es relativamente compacta.

La familia $\mathcal{U}$ está uniformemente acotada sobre todo Ω. Veamos que $\mathcal{U}$ es equicontinua sobre un disco $\mathbb{D}(a,r)$ cualquiera contenido en Ω. Para $z, w \in \mathbb{D}(a,r)$ tenemos que

$$|u(z) - u(w)| \leq \max_{b\in[z,w]} \|\nabla u(b)\|\ |z-w| \leq |z-w|\,,$$

donde $[z,w]$ denota el segmento que conecta z con w que yace en $\mathbb{D}(a,r)$ y, por tanto, en Ω. ♣

Teorema de Ascoli–Arzelà, general

El teorema de Ascoli–Arzelà, tal cual se ha enunciado y verificado, se aplica al espacio $\mathcal{C}$ de funciones continuas definidas en un dominio Ω y con valores en $\mathbb{C}$.

Pero una revisión de la demostración confirma, lector, que podemos sustituir $\mathbb{C}$ por un espacio métrico (Y, d_Y) arbitrario y a Ω por un espacio métrico (X, d_X) separable. La separabilidad de X se precisa para disponer de una sucesión densa en X sobre la que aplicar el argumento diagonal, y también para que la convergencia uniforme sobre compactos se puede metrizar.

Denotamos por $\mathcal{C}(X,Y)$ al espacio de las funciones continuas de X en Y.

- Decimos que una sucesión $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ converge a $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ uniformemente sobre compactos si para cualquier compacto $K \subset X$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero $N \geq 1$ tal que

  $$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x \in K \text{ y } n \geq N\,.$$

  En $\mathcal{C}(X,Y)$ se puede definir una distancia D de manera que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f uniformemente sobre compactos si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{D}(f_n, f) = 0$. Por supuesto la convergencia uniforme sobre compactos es una noción local y los compactos se pueden reemplazar en la definición por discos cerrados.

- Decimos que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ es equicontinua sobre compactos si para todo compacto $K \subset X$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon\,, \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in K \text{ tales que } d_X(x_1, x_2) \leq \delta\,.$$

  La equicontinuidad es, de nuevo, una noción local, y en su definición los compactos se pueden reemplazar por discos cerrados.

- Decimos que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ está puntualmente acotada si para todo $x \in X$ se tiene que

$$\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \quad \text{es relativamente compacto en } Y\,.$$

- Decimos que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ está uniformemente acotada sobre compactos si para todo compacto $K \subset X$ el conjunto

$$\{f(x) : x \in K,\ f \in \mathcal{F}\} \quad \text{es relativamente compacto en } Y.$$

  De nuevo, en este definición se pueden reemplazar los compactos por discos cerrados.

Inasequibles al desaliento, tras tanto «decimos», formulamos:

Teorema 5.12 (Teorema de Ascoli–Arzelà, general) *Para una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$, las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

1) *$\mathcal{F}$ es relativamente compacta,*
2) *$\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre compactos y es equicontinua sobre compactos,*
3) *$\mathcal{F}$ está puntualmente acotada y es equicontinua sobre compactos.*

Un caso particular muy relevante para ciertos usos posteriores, véase el apartado 5.6, es aquel en el que el espacio Y es compacto. En ese caso, la acotación uniforme y la acotación puntual son inmediatamente válidas para cualquier familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$:

Teorema 5.13 (Teorema de Ascoli–Arzelà, rango compacto) *Si el espacio métrico Y es compacto, para una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$ son equivalentes:*

1) *$\mathcal{F}$ es relativamente compacta,*
2) *$\mathcal{F}$ es equicontinua sobre compactos.*

5.2. Convergencia de sucesiones de funciones holomorfas

Pasamos ahora a considerar funciones holomorfas en Ω. Recordemos que $\mathcal{H}(\Omega)$ denota el conjunto de funciones holomorfas en el dominio Ω.

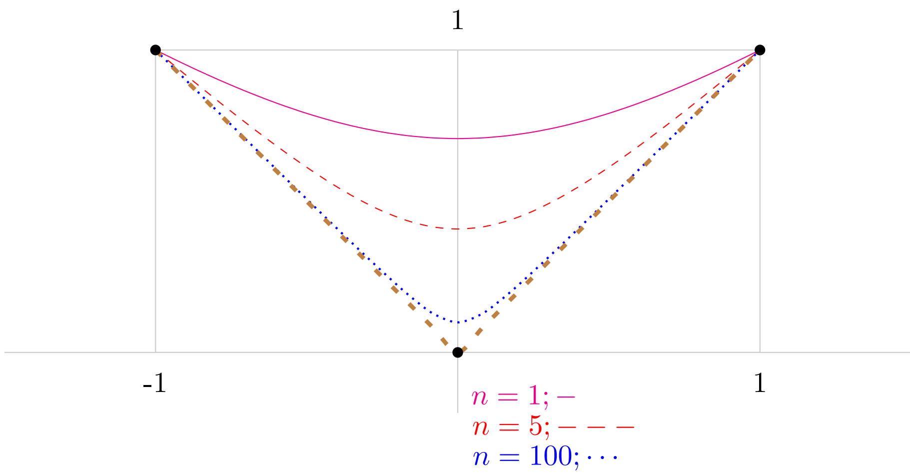
Teorema 5.14 (Teorema de convergencia de Weierstrass) *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω.*

Si $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$, entonces el límite f es una función holomorfa en Ω.

Además, en ese caso, $f_n' \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f'$.

En otros términos, el teorema de convergencia de Weierstrass afirma que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un conjunto cerrado de $\mathcal{C}(\Omega)$ (con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos) y que la operación de derivación $f \mapsto f'$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ es una función continua (con la susodicha topología).

Como contraste, y como bien sabe el lector, para funciones reales, el límite uniforme de funciones derivables no tiene por qué ser derivable:



Dibujo 5.1. $h(x) = \sqrt{(nx^2+1)/(n+1)}$.

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Para verificar que f es holomorfa en Ω vamos a comprobar que si $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r)) \subset \Omega$, entonces la función f cumple la fórmula integral de Cauchy en el disco $\mathbb{D}(z_0, r)$.

Tomemos un margen de seguridad s tal que $r < s < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Cada f_n es holomorfa en Ω. Por tanto, si $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$ tenemos que

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w-z_0|=s} \frac{f_n(w)}{(w-z)}\, dw\,.$$

Por tanto, para todo $n \geq 1$ y todo $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\Big| f(z) - \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w-z_0|=s} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \Big| \\
&\quad \leq |f(z) - f_n(z)| + \Big| \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w-z_0|=s} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w-z_0|=s} \frac{f_n(w)}{w-z}\, dw \Big| \\
&\quad \leq |f(z) - f_n(z)| + \frac{1}{2\pi} \Big| \int_{|w-z_0|=s} \frac{f(w) - f_n(w)}{w-z}\, dw \Big| \\
&\quad \leq |f(z) - f_n(z)| + \frac{s}{s-r} \max\big\{ |f(w) - f_n(w)| : \, w \in \partial\mathbb{D}(z_0, s) \big\}\,.
\end{aligned}$$

Si usamos ahora la convergencia uniforme de f_n a f sobre los compactos $K = \{z\}$ y $K = \partial\mathbb{D}(z_0, s)$, deducimos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w-z_0|=s} \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(z_0, r)\,.$$

Y por tanto f es holomorfa en $\mathbb{D}(z_0, r)$. Como z_0 es un punto arbitrario de Ω, tenemos que f es holomorfa en todo Ω.

Veamos ahora la convergencia de las derivadas. Esta convergencia será consecuencia de que la derivada se expresa mediante la fórmula de Cauchy en términos de f.

Sea, como antes, $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r)) \subset \Omega$ y, como antes, tomemos s tal que $r < s < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Para $n \geq 1$ tenemos que

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w-z_0|=s} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\, dw\,, \quad \text{para todo } w \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r))\,.$$

Como f es holomorfa en Ω, para f' se tiene una expresión análoga. Restando las expresiones integrales de f_n' y de f', tomando valor absoluto, y acotando las integrales en la forma usual, obtenemos que, para todo $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r))$,

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{r}{(s-r)^2} \max\big\{ |f_n(w) - f(w)| : \, w \in \partial\mathbb{D}(z_0, s) \big\}\,.$$

Y, por tanto, como f_n tiende a f uniformemente en el compacto $\partial\mathbb{D}(z_0, s)$ se deduce que f_n' tiende a f' uniformemente en el compacto $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r)) \subset \Omega$.

Como esto sucede para cualquier tal disco, se deduce que $f_n' \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f'$. ■

5.2.1. Criterio M de Weierstrass

Para la construcción de funciones holomorfas mediante series de funciones holomorfas (más sencillas), el siguiente corolario del teorema 5.14 es particularmente útil.

Corolario 5.15 (Criterio M de Weierstrass.) *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio Ω.*

Supongamos que para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una sucesión numérica M_n^K tal que

$$|f_n(z)| \le M_n^K\,, \quad \text{para todo } z \in K \text{ y cada } n \ge 1\,,$$

y tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n^K < +\infty\,.$$

Entonces

1) *$F_N(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos de Ω.*

2) *$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ define una función holomorfa en Ω.*

3) *$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $z \in \Omega$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es absolutamente convergente, porque está acotada término a término en valor absoluto por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{\{z\}}$. Así que $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es una función bien definida en todo Ω.

Para cada $N \ge 1$, la suma parcial $F_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ es holomorfa en Ω. Como para cada $K \subset \Omega$, se tiene que

$$p_K(F - F_N) \le \sum_{n>N} M_n^K\,,$$

tenemos que $F_N \overset{\Omega}{\Longrightarrow} F$. Por consiguiente, por el teorema 5.14 de convergencia, se deduce que F es holomorfa en todo Ω.

Además, $F'_N \equiv \sum_{n=1}^{N} f'_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} F'$, cuando $N \to \infty$. ■

El criterio del corolario 5.15 pudiera parecer muy aparatoso con estas sucesiones específicas M_n^K de cotas para cada compacto $K \subset \Omega$. Pero está claro que basta con disponer de esas sucesiones M para los discos cerrados contenidos en Ω. Si el dominio Ω es $\Omega = \mathbb{D}$, bastará con que para cada $R \in (0,1)$ se tenga $M_n^{(R)} > 0$, sumable $\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{(R)} < +\infty$ tal que

$$|f_n(z)| \le M_n^{(R)}\,, \quad \text{para cada } n \ge 1 \text{ y } z \in \mathbb{D}(0,R)\,.$$

En apartados subsiguientes, 5.2.2 y 5.3.1, construiremos algunas funciones holomorfas de importancia capital como la función ζ de Riemann, y otras, con el criterio M de Weierstrass como herramienta básica. En el capítulo 7 dedicado a los productos infinitos de funciones holomorfas, el criterio M probará su valor y su valía con gallardía verificando que ciertos productos infinitos de funciones holomorfas dan lugar a funciones holomorfas.

En ocasiones, apelaremos a la siguiente versión del criterio M de Weierstrass de apariencia más débil, aunque en la práctica, casi equivalente.

Corolario 5.16 (Criterio M de Weierstrass, bis) *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio Ω.*

Supongamos que existe una sucesión numérica M_n tal que

$$|f_n(z)| \le M_n\,, \quad \textit{para todo } z \in \Omega \textit{ y cada } n \ge 1\,,$$

y tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty\,.$$

Entonces,

1) $F_N(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre todo Ω.

2) $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ define una función holomorfa en Ω.

3) $F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Obviamente el corolario 5.16 se sigue del propio criterio M, pues la sucesión M_n puede usarse para cualquier compacto $K \subset \Omega$.

Ejemplo 5.2.1 *Holomorfía de series de potencias a partir de criterio M de Weierstrass.*

Como ilustración del criterio M en acción, y como oportunidad primera de entrenarnos en su uso, proponemos utilizarlo para verificar la holomorfía de las series de potencias (en su radio de convergencia).

Supongamos que $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R\,,$$

donde $R > 0$. Vamos a comprobar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}(0,R)$

Sea $r < R$. Tomemos $s = (r+R)/2$.

Para un cierto N_r se tiene que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{s}\,, \quad \text{para } n \ge N_r\,.$$

es decir,

$$|a_n| \le \left(\frac{1}{s}\right)^n, \quad \text{para } n \ge N_r\,.$$

Tomemos como sucesión M asociada al disco cerrado $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$ a la sucesión numérica $M_n^{(r)} = |a_n|\, r^n$. Entonces por una parte

$$|a_n\, z^n| \le M_n^{(r)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))\,.$$

Y, por otra parte,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, r^n \le \sum_{n<N_r} |a_n|\, r^n + \sum_{n \ge N_r} \left(\frac{r}{s}\right)^n < +\infty\,.$$

puesto que $r/s < 1$.

Como cualquier compacto $K \subset \mathbb{D}$ está contenido en $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$ para algún $r \in (0,1)$, el criterio M de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ define una función holomorfa f en $\mathbb{D}$.

Además,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

♣

Teorema de la doble serie de Weierstrass

Supongamos que tenemos una sucesión $(f_n(z))_{n\geq 1}$ de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$. Cada una de estas funciones tiene un desarrollo en serie de potencias de z que es válido en todo $\mathbb{D}$:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Supongamos además que las $f_n(z)$ cumplen las condiciones del teorema de Weierstrass: para cada $R \in (0,1)$ existe una sucesión $(M_n^{(R)})_{n\geq 1}$ de números reales positivos de manera que

$$|f_n(z)| \leq M_n^{(R)}\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(0,R)\,,$$

y tales que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{(R)} < +\infty$.

La función $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{D}$. Nos interesa el **desarrollo de $F(z)$ en serie de potencias de z**.

Observe, lector, que apelando a las cotas de la fórmula de Cauchy, podemos acotar el coeficiente $a_k^{(n)}$ de $f_n(z)$ mediante

$$(\flat) \quad |a_k^{(n)}| \leq \frac{M_n^{(R)}}{R^k}\,, \quad \text{para } n \geq 1 \text{ y } k \geq 0\,,$$

donde $R \in (0,1)$ es un radio cualquiera, pero fijo.

Esto nos dice, en particular, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_k^{(n)}| < +\infty\,, \quad \text{para cada } k \geq 0\,.$$

Para cada $k \geq 0$, definamos $A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)}$.

Teorema 5.17 (Teorema de la doble serie de Weierstrass) *Con las notaciones anteriores,*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

En otras palabras, el k-ésimo coeficiente de Taylor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es la serie de los k-ésimos coeficientes de Taylor de los sumandos $f_n(z)$. Podemos escribir el teorema de la doble serie de Weierstrass, justificando así su apelativo, en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}\, z^k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)}\Big)\, z^k\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

El teorema de la doble serie es, pues, un intercambio de orden de sumación. Podemos verificar la legalidad de ese intercambio comprobando que la serie doble es absolutamente convergente. Veamos. Si $|z| < R < 1$, entonces, apelando a la cota ($\flat$), tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(n)}||z^k| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} M_n^{(R)}\frac{|z|^k}{R^k} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n^{(R)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{R^k} = \frac{R}{R-|z|}\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{(R)} < +\infty\,.$$

Pero, con la maquinaria de que disponemos, vamos a dar como demostración oficial del teorema de la serie doble de Weierstrass la siguiente.

demostración del teorema 5.17. Para $N \ge 1$, sea

$$F_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Sabemos que $F_N \overset{\mathbb{D}}{\Longrightarrow} F$. Por el teorema 5.14 de convergencia de Weierstrass, tenemos que las derivadas k-ésimas $F_N^{(k)}$ asimismo convergen: $F_N^{(k)} \overset{\Omega}{\Longrightarrow} F^{(k)}$. Por tanto, en particular,

$$\lim_{N\to\infty} F_N^{(k)}(0) = F^{(k)}(0)\,, \quad \text{para cada } k \ge 0\,.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_k^{(n)} = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}\,, \quad \text{para cada } k \ge 0\,.$$

Lo que prueba el resultado. ■

5.2.2. Función ζ y algunas otras series de Dirichlet: Φ y Υ

Más adelante, en el capítulo 11, dedicaremos detenida atención a las series de Dirichlet generales y sus propiedades.

Aquí, y ahora, tan sólo consideramos algunos ejemplos concretos de estas series de Dirichlet que definen funciones holomorfas importantes que aparecerán en capítulos sucesivos y que son particularmente relevantes en la teoría de los números, en concreto, en el teorema 12.1 de los números primos.

Anticipamos a este apartado la presentación de la función ζ de Riemann, de la función η de Dirichlet, y algunas otras por dos motivos. En primer lugar, porque su "construcción" supone un excelente entrenamiento en el uso del criterio M de Weierstrass y en segundo lugar, porque así ya dispondremos de ellas para según adquiramos técnica ir desarrollando sus propiedades (las de estas funciones) pausadamente.

Comenzamos con la función ζ de Riemann.

La función ζ de Riemann en $\mathbb{H}_1$

Definamos, para $z \in \mathbb{H}_1$,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots .$$

Fijemos $\sigma > 1$. Para z en el semiplano $\mathbb{H}_\sigma$ se tiene que

$$\Big|\frac{1}{n^z}\Big| = \frac{1}{n^{\Re(z)}} \le \frac{1}{n^\sigma} \triangleq M_n .$$

Como $\sigma > 1$, se tiene que $\sum_{n=1}^\infty M_n < +\infty$. Por consiguiente, por el criterio bis de Weierstrass, corolario 5.16, la función ζ es holomorfa en $\mathbb{H}_\sigma$. Y como esto es cierto para cualquier $\sigma > 1$, se tiene que ζ es holomorfa en $\mathbb{H}_1$.

Además,

$$|\zeta(z)| \le \zeta(\sigma)\,, \quad \text{para todo } z \text{ con } \Re(z) \ge \sigma .$$

La derivada de ζ se escribe:

$$\zeta'(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^z}\,, \quad \text{para todo } z \text{ con } \Re(z) > 1 .$$

y, en general, para cada entero $k \ge 1$,

$$\zeta^{(k)}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} [-\ln(n)]^k \,\frac{1}{n^z}\,, \quad \text{para todo } z \text{ con } \Re(z) > 1 .$$

☞ **Nota** 5.2.1. ☜ Quizás convenga precisar (recordar) el significado de $1/n^z$ en la expresión de ζ. Si n es entero positivo:

$$1/n^z = e^{-\ln(n) z}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

donde $\ln(n)$ es el logaritmo real (usual) de n, de manera que $\ln(n)$ es un número real y positivo (salvo para $n = 1$).

La función $z \mapsto 1/n^z$ es una función entera que no se anula en ningún punto. Si z es real y positivo, entonces $1/n^z$ es real y menor que 1.

Además, para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{n^z}\Big) = \frac{-\ln(n)}{n^z} .$$

En general, cuando escribamos n^z con n entero positivo, como más adelante en las series de Dirichlet, entenderemos siempre que $\ln(n)$ es real. ♠

La función ζ restringida al semieje real $\{x > 1\}$ es una función con valores reales decreciente y convexa.

- $\lim_{x\uparrow\infty} \zeta(x) = 1$. Para verificarlo, observe el lector que para $x \geq 2$ y para cualquier $N \geq 2$ se tiene que

$$\zeta(x) \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n>N} \frac{1}{n^2}\,.$$

Por tanto, para cualquier entero $N \geq 2$, se tiene que

$$\limsup_{x\to\infty} \zeta(x) \leq 1 + \sum_{n>N} \frac{1}{n^2}$$

y, por tanto, haciendo $N \to \infty$, deducimos que

$$\limsup_{x\to\infty} \zeta(x) \leq 1\,.$$

De donde concluimos que $\lim_{x\to\infty} \zeta(x) = 1$, pues $\zeta(x) \geq 1$, para todo $x > 1$.

- $\lim_{x\downarrow 1} \zeta(x) = \infty$. Para verlo, observe el lector que para todo $N \geq 1$ se tiene

$$\liminf_{x\downarrow 1} \zeta(x) \geq \liminf_{x\downarrow 1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\,.$$

Por tanto,

$$\liminf_{x\downarrow 1} \zeta(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Algunas series de Dirichlet holomorfas en $\mathbb{H}_1$

El mismo argumento, basado en el criterio M, que nos ha permitido comprobar que la función ζ es holomorfa en $\mathbb{H}_1$, nos muestra que si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de número complejos que no crece rápidamente, es decir, tal que para todo $\delta > 0$ cumple que

$$\sup_{n\geq 1} \frac{|a_n|}{n^\delta} < +\infty\,,$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

converge para cada $z \in \mathbb{H}_1$ y define allí una función holomorfa.

Estas series son casos particulares de las llamadas **series de Dirichlet**.

Conviene recalcar que para cada $z \in \mathbb{H}_1$ se tiene convergencia absoluta de la serie y que para cada $\sigma > 1$ se tiene convergencia uniforme en $\mathbb{H}_\sigma$.

Siguen a continuación un par de ejemplos concretos.

EJEMPLO 5.2.2 *La función $\Phi(z)$ en $z \in \mathbb{H}_1$.*

Enumeramos los números primos en orden creciente: $p_1 < p_2 < \cdots$. Definimos la función $\Phi(z)$ para $z \in \mathbb{H}_1$ mediante la serie

$$\Phi(z) = \sum_{p \text{ primo}} \frac{\ln(p)}{p^z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(p_m)}{p_m^z} = \frac{\ln(2)}{2^z} + \frac{\ln(3)}{3^z} + \frac{\ln(5)}{5^z} + \cdots .$$

Podemos escribir

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

donde $a_n = 0$ si n no es un número primo y $a_n = \ln(n)$ si n es primo. Observe, lector, que $|a_n| \leq \ln(n)$, para cada entero $n \geq 1$. ♣

EJEMPLO 5.2.3 *La función $\Upsilon(z)$ para $z \in \mathbb{H}_1$.*

Más adelante, en el apartado 7.2.3, comprobaremos que esta función Υ que vamos a presentar seguidamente es, de hecho, la derivada logarítmica $-\zeta'/\zeta$ de la función ζ. El uso del símbolo Υ para denotar a esta función no es convencional.

Para definir la función Υ usaremos la función aritmética Λ de von Mangoldt dada, para cada entero $n \geq 1$, por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), & \text{si } n = p^k, \text{ para algún primo } p \text{ y un entero } k \geq 1\,, \\ 0, & \text{si } n \text{ no es potencia de un primo}\,. \end{cases}$$

Definimos

$$\Upsilon(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

La función Υ es holomorfa en $\mathbb{H}_1$, pues $|\Lambda(n)| \leq \ln(n)$, para cada $n \geq 1$.

La función Λ se anula si n no es una potencia de un número primo. Además, para cada $z \in \mathbb{H}_1$, la serie que define $\Upsilon(z)$ es absolutamente convergente, así que podemos reordenarla para reescribirla en la forma

$$\Upsilon(z) = \sum_{p} \ln(p) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{zm}} = \sum_{p} \frac{\ln(p)}{p^z - 1}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_1\,,$$

pues para cada primo p,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{zm}} = \frac{1/p^z}{1 - 1/p^z} = \frac{1}{p^z - 1}\,.$$

Nótese que $|1/p^z| = p^{-\Re(z)} < 1$. ♣

Observe el lector, si le parece, cuán próximas son las expresiones de Υ y de Φ, como series indexadas en los números primos: si $z \in \mathbb{H}_1$,

$$\Phi(z) = \sum_p \frac{\ln(p)}{p^z} \qquad \text{y} \qquad \Upsilon(z) = \sum_p \frac{\ln(p)}{p^z - 1}\,.$$

De hecho, tenemos que:

Proposición 5.18 *Existe una función holomorfa D en $\mathbb{H}_{1/2}$ tal que*

$$\Upsilon(z) = \Phi(z) + D(z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{H}_1\,.$$

En otros términos, $\Upsilon - \Phi$ es (se extiende a ser) holomorfa en $\mathbb{H}_{1/2}$.

demostración. Para $z \in \mathbb{H}_1$ se tiene que

$$D(z) := \Upsilon(z) - \Phi(z) = \sum_p \ln(p)\Big(\frac{1}{p^z - 1} - \frac{1}{p^z}\Big) = \sum_p \frac{\ln(p)}{p^z(p^z - 1)}.$$

Fijemos un primo p. La función $z \mapsto p^z(p^z - 1)$ es entera, y se anula cuando $z = 2k\pi\imath/\ln(p)$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir, en una cierta sucesión de puntos en el eje imaginario $\partial\mathbb{H}$. Así que, en particular,

$$z \longmapsto \frac{1}{p^z(p^z - 1)}\,, \quad \text{es holomorfa en } \mathbb{H}.$$

Aplicaremos el criterio M a la serie de funciones que define D. Como acabamos de ver, las funciones $\frac{1}{p^z(p^z-1)}$ son holomorfas en todo el semiplano derecho, pero la convergencia de la serie sólo se da, como vamos a ver, en el semiplano $\mathbb{H}_{1/2}$ Veamos.

Si $x \geq 1/2$, se tiene que $p^x - 1 \geq \alpha\, p^x$ para cada primo p, donde $\alpha = 1 - \sqrt{2}/2 > 0$. Por tanto, si $\Re(z) \geq 1/2$ tenemos que

$$|p^z(p^z - 1)| \geq |p^z|(|p^z| - 1) = p^{\Re(z)}(p^{\Re(z)} - 1) \geq p^{\Re(z)}(\alpha p^{\Re(z)}) = \alpha p^{2\Re(z)}\,.$$

Por consiguiente, si $\sigma > 1/2$ tenemos que

$$\Big|\frac{\ln(p)}{p^z(p^z - 1)}\Big| \leq \frac{1}{\alpha}\frac{\ln(p)}{p^{2\sigma}}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_\sigma\,.$$

Como

$$\sum_p \frac{\ln(p)}{p^{2\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{2\sigma}} < +\infty\,,$$

pues $2\sigma > 1$, el criterio M de Weierstrass (corolario 5.15) nos dice que la función D es holomorfa en $\mathbb{H}_\sigma$, para cada $\sigma > 1/2$, y, por tanto D es holomorfa en $\mathbb{H}_{1/2}$.

Finalmente, para completar, observemos que la serie que define la diferencia $D(z)$ no es sumable en $z = 1/2$, pues

$$\sum_p \frac{\ln(p)}{p^{1/2}(p^{1/2}-1)} \geq \ln 2 \sum_p \frac{1}{p},$$

y $sum_p \frac{1}{p} = +\infty$, como comprobaremos, más adelante, en la proposición 7.14 del capítulo 7.

■

5.3. Sumación por partes

Traemos aquí a colación la **sumación por partes**, un truco o técnica, como prefiera el lector, que en primera instancia va a ayudar a expandir el uso y aplicabilidad del criterio M de Weierstrass. Esta técnica de sumación por partes, aunque de manejo sencillo, demanda en ocasiones una cierta perspicacia (o experiencia). Queda dicho.

Recuerde el lector esa técnica, tan querida, de la *integración por partes* de tamaña utilidad para el cálculo de primitivas y el de integrales definidas de productos de funciones fg;

> primero se interpreta una de las dos funciones, digamos, f, como derivada $f = u'$ y, siguiendo la notación habitual, se escribe $g = v$. Luego que $(uv)' = u'v + uv'$, y esto hace, (con la notación de que $\int f$ significa una primitiva de f) que $\int u'v = uv - \int uv'$. De manera que el cálculo de la primitiva de $u'v$ queda reducido de uv' que esperamos que sea más sencillo.

Vamos ya con una versión general de la sumación por partes. Describimos la notación previamente al enunciado de la sumación por partes que recogemos en un lema.

Sean $(a_n)_{n=0}^N$ y $(b_n)_{n=0}^N$ dos listas de números complejos. Definimos la lista $(A_n)_{n=0}^N$ de sumas parciales de los a_n como $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, para $0 \leq n \leq N$. Esta sucesión A_n desempeña el rol de primitiva de los a_n. Observe, lector, que $a_n = A_n - A_{n-1}$, para $1 \leq n \leq N$ y que $a_0 = A_0$.

Lema 5.19 (Sumación por partes) *Con la notación anterior,*

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\, b_n = A_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1})\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Preste atención, lector, al detalle de la manipulación algebraica que sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n\, b_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n\, b_n + a_0 b_0 = \sum_{n=1}^{N} \big(A_n - A_{n-1}\big) b_n + a_0 b_0 \\ &= \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N} A_{n-1} b_n + a_0 b_0 = \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N} A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n b_{n+1} = A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)\,.\end{aligned}$$

■

El lector, proclive a la añoranza y a la morriña, quizás prefiera escribir la expresión anterior en la forma

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\, b_n = A_N b_N - A_0 b_0 - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$$

o, incluso, para $0 \le M < N$, en la forma

$$\sum_{n=M+1}^{N} a_n\, b_n = A_N b_N - A_M b_M - \sum_{n=M}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)\,,$$

por su semejanza con la dilecta integración por partes.

El siguiente ejemplo del uso de la sumación por partes, puro ejercicio inicial de familiarización, es bien afín al uso habitual de la integración por partes. Conviene quizás hacer notar, lector, que rara vez apelaremos a la sumación por partes invocando el lema anterior, pues el detalle de la exacta expresión, con esos desplazamientos de índices de sumación en una unidad hacia arriba o hacia abajo, no son fáciles de recordar, mientras que remedar el argumento del lema 5.19, con las especificidades que cada caso requiera, es directo y efectivo.

Ejemplo 5.3.1 *Fórmula cerrada para $\sum_{n=1}^{N} n\, 2^n$.*

Observe, lector, que $2^n = 2^{n+1} - 2^n$ para cada $n \ge 0$. Atención:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n\, 2^n &= \sum_{n=1}^{N} n(2^{n+1} - 2^n) = \sum_{n=2}^{N+1} (n-1) 2^n - \sum_{n=1}^{N} n 2^n = N 2^{N+1} + \sum_{n=2}^{N} (-1) 2^n - 2 \\ &= N 2^{N+1} - \sum_{n=1}^{N} 2^n = N 2^{N+1} - (2^{N+1} - 2) = (N-1)\, 2^{N+1} + 2\,.\end{aligned}$$

Con el mismo argumento se prueba que si $z \in \mathbb{C}$, $z \ne 1$, entonces para todo entero $N \ge 1$ se tiene que

$$(\star) \quad \sum_{n=1}^{N} n z^N = \frac{N z^{N+1}}{z-1} - \frac{z^{N+1} - z}{(z-1)^2}\,.$$

L'Hôpital de ($\star$) en $z = 1$ da directamente la fórmula para la suma de los N primeros números naturales

$$\sum_{n=1}^{N} n = \binom{N+1}{2}. \qquad \clubsuit$$

☞ **Nota** 5.3.1. ☜ La fórmula ($\star$) se obtiene directa y alternativamente de que

$$\sum_{n=1}^{N+1} z^n = \frac{z^{N+2} - z}{z-1}, \quad \text{para todo } z \neq 1,$$

derivando y multiplicando por z. ♠

Uno de los usos más relevantes de la técnica de sumación por partes estriba en su capacidad para dilucidar la sumabilidad de sucesiones, en concreto, en su habilidad para trasformar sucesiones que son sólo condicionalmente sumables en sucesiones que son absolutamente sumables con la misma suma, como ocurre en los criterios de Leibniz y de Dirichlet.

Ejemplo 5.3.2 *Criterio de sumabilidad de Leibniz y de Dirichlet.*

El criterio de Leibniz, entrañable recuerdo de los iniciales escarceos del lector con el cálculo y la sumabilidad de series, afirma que

si $(b_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de términos positivos que decrece hacia 0, entonces la sucesión alternada en signo $\big((-1)^n b_n\big)_{n\geq 0}$ es sumable.

Veamos cómo abordamos su verificación con la técnica de sumación por partes.

Si hacemos $a_n = (-1)^n$, y aplicamos sumación por partes como en el lema 5.19, tenemos para cada $N \geq 1$ que

$$(\dagger) \qquad \sum_{n=0}^{N} (-1)^n b_n = \sum_{n=0}^{N} a_n\, b_n = A_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

Observe, lector, que los A_n están acotados; de hecho, A_n es 1 si n es par y A_n es 0 si n es impar.

Así que $\lim_{N\to\infty} A_N b_N = 0$, pues los A_n están acotados y los b_n tienden a 0. La suma de la derecha en ($\dagger$) es *absolutamente* sumable, pues

$$\sum_{n=0}^{N-1} |A_n(b_n - b_{n+1})| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |(b_n - b_{n+1})| = \sum_{n=0}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_N \leq b_0,$$

donde hemos usado que los $|A_n| \leq 1$, álgebra telescópica y que los b_n decrecen.

Así que *la sumación por partes ha sido capaz de transformar la sucesión original, que no es absolutamente sumable, en una sucesión absolutamente sumable.* Pura alquimia. ¿Cómo ha ocurrido? Por la combinación de dos razones: 1) porque los A_n están acotados, lo que a su vez sigue de que los a_n oscilan en signo, 2) porque la derivada discreta $b_n - b_{n+1}$ de los b_n es telescópicamente sumable. En general, si sólo usáramos que los a_n están acotados, sin su estructura específica de signos, que es la que da lugar a la cancelación, sólo obtendríamos que $A_n = O(n)$.

Observe, lector, que haciendo $N \to \infty$ en (†), se tiene de hecho

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_{2n} - b_{2n+1}) \, .$$

El argumento anterior se generaliza (sin apenas variación) y nos da el que se conoce como **criterio de sumabilidad de Dirichlet**:

Lema 5.20 (Criterio de sumabilidad de Dirichlet) *Si*

- $(a_n)_{n\geq 0}$ *es una sucesión de números complejos cuyas sumas parciales* $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *están* acotadas,
- *y* $(b_n)_{n\geq 0}$ *es una sucesión de términos* positivos *que decrece hacia 0,*

entonces la sucesión $(a_n \, b_n)_{n\geq 0}$ *es sumable. De hecho,*

$$(\star) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, b_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1}) \, ,$$

y en consecuencia, además,

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, b_n \Big| \leq b_0 \sup_{n\geq 0} |A_n| \, .$$

Resaltamos el milagro alquímico contenido en $(\star)$: la serie en la izquierda es sólo sumable, pero la serie en la derecha es absolutamente sumable.

Como ilustración del uso de este criterio de Dirichlet, consideremos la siguiente versión *compleja* (o si se prefiere extensión) del criterio de Leibniz:

Lema 5.21 (Versión compleja del criterio de Leibniz) *Sea* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales no negativos que* decrece *hacia 0.*

Entonces para cualquier z *con* $|z| = 1$*, salvo a lo sumo* $z = 1$*, se tiene que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \, z^n$ *es sumable.*

Además,

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, z^n \Big| \leq \frac{2 \, b_0}{|z-1|} \, , \quad \textit{para todo } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \, .$$

El criterio estándar de Leibniz tan sólo contempla el caso $z = -1$, de entre todos aquellos z con $|z| = 1$. Para $z = 1$, el resultado es falso, como el ejemplo $b_n = 1/(n+1)$, para $n \geq 0$, nos muestra enseguida.

Notemos también que si $|z| < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ es sumable. Así que una serie de potencias de z con coeficientes reales decrecientes a 0 es sumable para todo $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \setminus \{1\}$. Los a_n de la notación general anterior son ahora los z^n.

DEMOSTRACIÓN. Para verificar esta versión compleja de Leibniz, fijemos $z \in \mathbb{D}$, y sea

$$s_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}\,.$$

Para $z \neq 1$, tenemos la cota

$$|s_n(z)| \le \frac{2}{|z-1|}\,, \quad \text{para todo } n \ge 0\,.$$

Cuando j va tomando valores $j \ge 1$, los z^j, con $z \neq 1$, se van distribuyendo por el círculo unidad de manera que su suma no se dispara. Cuando $z = 1$ no se distribuyen y $s_n(1) = n + 1$. En cualquier caso, estas sumas parciales $A_n = s_n(z)$, con $z \neq 1$, están acotadas, y podemos apelar al criterio de Dirichlet, y concluir la sumabilidad (condicional) de $\sum_{n=0} b_n\, z^n$. ■ ♣

La esperanzada moraleja de la discusión de los criterios de Leibniz y de Dirichlet, ejemplo 5.3.2, es que la sumación por partes ha exhibido las sumas parciales de una serie condicionalmente sumable como sumas parciales de una serie absolutamente sumable. Y esto es importante para nosotros, aquí y ahora, lector, porque el criterio M de Weierstrass para sumar series, corolarios 5.15 y 5.16, precisa y requiere que las funciones holomorfas que se han de sumar sean *absoluta* y uniformemente sumables (sobre compactos).

El siguiente apartado 5.3.1 ilustrará este uso de la sumación por partes para poder aplicar el criterio M de Weierstrass. Pero antes un ejemplo más de fructífera argumentación por sumación por partes.

EJEMPLO 5.3.3 ***Criterio de Eneström–Kakeya.***

Es este un criterio sobre ubicación de las raíces complejas de ciertos polinomios con coeficientes reales positivos. Comenzamos con la siguiente observación.

Sea $P(z)$ un polinomio

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n\, z^n$$

cuyos coeficientes son números reales positivos que satisfacen la siguiente condición de monotonía

$$(\star) \quad a_0 > a_1 > \cdots > a_N > 0\,.$$

Entonces el polinomio P no tiene raíces en $\mathbb{D}$.

Para aprovechar la información de que los coeficientes decrecen cuando crece el índice, multiplicamos P por $(1-z)$ y aplicamos sumación por partes. Obtenemos

$$(1-z)P(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n\, z^n-\sum_{n=0}^{N} a_n z^{n+1}=\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n-1})z^n-a_N z^{N+1}+a_0.$$

Si P se anulara para un cierto $\widehat{z}$ con $|\widehat{z}|<1$, entonces se cumpliría

$$a_0=\sum_{n=1}^{N}(a_{n-1}-a_n)\,\widehat{z}^{\,n}+a_N\,\widehat{z}^{\,N+1}\,,$$

de donde, tomando valores absolutos, concluiríamos, usando que $|\widehat{z}|<1$ y que los a_n decrecen, que

$$a_0\le\sum_{n=1}^{N}(a_{n-1}-a_n)|\widehat{z}|^n+a_N|\widehat{z}|^{N+1}<\sum_{n=1}^{N}(a_{n-1}-a_n)+a_N=a_0\,;$$

contradicción que implica que no hay tal $\widehat{z}$.

Si los coeficientes cumplieran que $a_N>a_{N-1}>\cdots>a_0$, en lugar de $(\star)$, entonces la conclusión sería que los N ceros de P yacen en el disco cerrado $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Esto se puede ver remedando el argumento anterior, o simplemente considerando el **polinomio Q volteado** de P,

$$Q(z)=z^N P(1/z)=\sum_{n=0}^{N} a_{N-n}\, z^n\,.$$

El polinomio volteado Q tiene los mismos coeficientes que P pero en orden inverso; las raíces del polinomio volteado Q son los recíprocos de las raíces de P.

Podemos enunciar un resultado más general:

Lema 5.22 (Eneström–Kakeya) *Sea $P(z)=\sum_{n=0}^{n} a_n\, z^n$ un polinomio con coeficientes reales positivos. Denotemos*

$$M=\max_{0\le n\le N-1}\frac{a_n}{a_{n+1}}\qquad y\qquad m=\min_{0\le n\le N-1}\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Entonces, para toda raíz z de P se cumple que

$$m\le|z|\le M\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que si $P(z)=0$ entonces $|z|\le M$, porque la otra cota se obtiene de ésta considerando el polinomio volteado $Q(z)=z^N P(1/z)$.

Tomemos, por prudencia, $M_\star>M$. Sea $w=z/M_\star$ que es raíz del polinomio $R(w)=\sum_{n=0}^{N}(a_n M_\star^n)w^n$. Como

$$a_n M_\star^n<a_{n+1}M_\star^{n+1}\,,\quad \text{para } 0\le n\le N-1\,,$$

(lograr el '$<$' estricto en las desigualdades anteriores es el papel de $M_\star$), la discusión anterior nos dice que $|w|\le 1$ y, por tanto, que $|z|\le M_\star$, de donde, finalmente, $|z|\le M$. ■ ♣

5.3.1. Función η de Dirichlet

Introducimos ahora la **función η de Dirichlet**, prima hermana, bien avenida, de la función ζ de Riemann.

Proposición 5.23 *Para cada $z \in \mathbb{H}$ la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} \quad \textit{es sumable}.$$

La función η definida en $\mathbb{H}$ por

$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{H},$$

es holomorfa en $\mathbb{H}$.

Si tomáramos directamente valores absolutos en la serie definitoria de η y argumentáramos como en la definición de la función ζ de Riemann, deduciríamos que η está bien definida y es holomorfa (tan sólo) en el semiplano $\mathbb{H}_1$.

La ganancia de holomorfía (y sumabilidad) desde $\mathbb{H}_1$ hasta $\mathbb{H}$ va a venir dada porque las sumas parciales de $(-1)^n$ están acotadas (fruto trivial de su cancelante oscilación) y, claro, de la sumación por partes. Veamos.

DEMOSTRACIÓN. Definamos $A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}$, para $n \geq 1$ y $A_0 = 0$. Los A_n, $n \geq 0$, valen alternadamente 0 y 1.

Fijemos un entero $N \geq 1$ y un punto $z \in \mathbb{H}$ y sumemos por partes, como en el criterio de Leibniz, ejemplo 5.3.2:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = A_N \frac{1}{N^z} + \sum_{n=1}^{N-1} A_n \Big(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}\Big).$$

El sumando primero no es problema, porque como $|A_N| \leq 1$ y $\Re(z) > 0$, tenemos $\lim_{N\to\infty} A_N N^{-z} = 0$.

Vamos ahora con la suma. Acotamos cada sumando $\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}$ escribiéndolo como integral y acotando el integrando; en realidad, un argumento de acotación por valor medio. Como

$$\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} = z \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{z+1}},$$

podemos acotar

$$\Big|\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}\Big| \leq |z| \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\Re(z)+1}} \leq |z| \frac{1}{n^{\Re(z)+1}}.$$

Ahora, si z pertenece a un compacto contenido en $\mathbb{H}$, tenemos que $\Re(z) \geq \sigma > 0$ y $|z| \leq R < +\infty$, y por lo tanto

$$\Big|A_n \Big(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}\Big)\Big| \leq R \frac{1}{n^{\sigma+1}}.$$

El criterio M de Weierstrass nos da que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big(\frac{1}{n^z}-\frac{1}{(n+1)^z}\Big)$$

define una función holomorfa en $\mathbb{H}$. En suma, la función η es holomorfa en $\mathbb{H}$. ■

Extensión de ζ a $\mathbb{H}$

La función η nos permite, como vamos a comprobar a continuación, extender la función ζ, que originalmente está sólo definida en $\mathbb{H}_1$, a una función meromorfa en todo $\mathbb{H}$. Esta extensión será muy importante más adelante en conexión con el teorema de los números primos; la obtendremos de forma alternativa en el apartado 10.3.1.

Observe, lector, que si $z \in \mathbb{H}_1$ entonces

$$\eta(z)+\zeta(z)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^z}=\frac{2}{2^z}\,\zeta(z)\,,$$

es decir,

$$\zeta(z)\Big(1-\frac{2}{2^z}\Big)=\eta(z)\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{H}_1\,.$$

Como η es holomorfa en $\mathbb{H}$ y $1-2/2^z$ es entera, su cociente, que es ζ, es una función meromorfa en $\mathbb{H}$. Es decir, tenemos una extensión meromorfa de ζ desde el semiplano $\mathbb{H}_1$ al semiplano $\mathbb{H}$.

¿Qué polos tiene esta extensión? Sólo los ceros de $1-2/2^z$ pueden ser polos de la extensión de ζ. Los ceros de $1-2/2^z$ son justamente los puntos $z_k=1+(1/\ln(2))2k\pi\imath$, con $k\in\mathbb{Z}$. Estos puntos están todos en el eje vertical $\Re(z)=1$, y entre ellos se encuentra $z=1$.

Designemos por $\mathcal{P}$ a los polos de (la extensión de) ζ en $\mathbb{H}$. Vamos a comprobar seguidamente que $\mathcal{P}=\{1\}$.

Por ahora tenemos que $\mathcal{P}\subset\{z_k=1+(1/\ln(2))2k\pi\imath,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Queremos verificar que z_k, $k\neq 0$, es un cero de la función η. No es fácil probar esto directamente, pero lo lograremos indirectamente tras un ingenioso rodeo debido a David (Vernon) Widder, que elaboramos a continuación. La razón de la notación $\mathcal{P}$ es para iluminar este rodeo de Widder.

Consideremos la sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $t_n=1$ si n no es múltiplo de 3 y $t_n=-2$ si t_n es múltiplo de 3, es decir, la sucesión $1,1,-2,1,1,-2,\ldots$. Las sumas parciales T_n, $n\geq 1$, de los t_n están acotadas; de hecho, T_n es el resto módulo 3 de n.

Con el mismo argumento que el usado en la demostración de la proposición 5.23, se comprueba que la función τ dada por la serie

$$\tau(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{n^z}$$

está bien definida y es holomorfa en todo $\mathbb{H}$. La función τ tiene una relación con ζ análoga a la de η con ζ:

$$\zeta(z)\Big(1-\frac{3}{3^z}\Big)=\tau(z)\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{H}_1\,.$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{P}\subset\{w_k=1+(1/\ln(3))2k\pi\imath,\ k\in\mathbb{Z}\}\,,$$

y, por tanto,

$$\mathcal{P}\subset\{z_k=1+(1/\ln(2))2k\pi\imath,\ k\in\mathbb{Z}\}\bigcap\{w_k=1+(1/\ln(3))2k\pi\imath,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{1\}\,.$$

Esta intersección es $\{1\}$ porque si hubiera $z_k=w_j$, para $k,j\in\mathbb{Z}$, entonces $k/\ln(2)=j/\ln(3)$, y, por tanto, $k=j=0$, pues $\ln(2)/\ln(3)$ es, trivialmente, irracional.

Observe, lector, que como consecuencia de que el único polo de la extensión de ζ es $z=1$, se deduce que necesariamente η se anula en los puntos z_k con $k\neq 1$. Esto nos da identidades inopinadas y asombrosas como, por ejemplo, que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos\Big(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}2\pi\Big)=0\,.$$

Resta por determinar el comportamiento de ζ en $z=1$.

En $z=1$ tenemos que $\eta(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$, el canónico ejemplo del criterio de Leibniz. Como es una suma alternada sabemos que, por ejemplo, $1>\eta(1)>1-(1/2)=1/2$ y, en particular, que $\eta(1)>0$. Así que, en efecto, ζ tiene un polo en $z=1$.

Como $1-(2/2^z)$ tiene un cero de orden 1 en $z=1$, tenemos que ζ tiene un polo de orden 1 en $z=1$. El residuo de ζ en $z=1$, viene dado por

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}(z-1)\,\zeta(z)&=\lim_{z\to 1}\,(z-1)\,\frac{\eta(z)}{1-2/2^z}\\&=\eta(1)\,\lim_{z\to 1}\,\frac{(z-1)}{1-2/2^z}=\eta(1)\,\lim_{z\to 1}\,\frac{(z-1)}{1-e^{-(z-1)\ln(2)}}=\frac{\eta(1)}{\ln(2)}\,.\end{aligned}$$

El valor de η en $z=1$ es exactamente $\ln(2)$. Esto lo estableceremos más adelante, en el ejemplo 9.6.1. En conclusión, hemos verificado, con ayuda de la función η de Dirichlet, que:

Teorema 5.24 *La función ζ de Riemann se extiende a ser meromorfa en $\mathbb{H}$. Tiene un único polo, en $z=1$, y allí su residuo es* 1.

Con ayuda de la transformada de Laplace, volveremos a demostrar más adelante este teorema de extensión, véase el teorema 10.8.

☞ **Nota** 5.3.2. ☜ Si uno ya supiera, como es el caso, que la función ζ extendida a todo $\mathbb{H}$ sólo tiene un polo y que éste es $z=1$, entonces se concluye que la función η debe anularse en los z_k, para todo entero $k\neq 0$. Edmund Landau sugirió en 1909 el interés metodológico de una verificación *directa*, es decir, sin usar información sobre la función ζ, de que η se anula en estos z_k. Esto se conoció como problema de Landau hasta que Widder, *circa* 1940, pergeñó el sutil rodeo que hemos descrito más arriba. ♠

5.4. Herencia por convergencia

Por **teorema de herencia** (por convergencia) entendemos aquí cualesquiera teoremas que afirmen que si las funciones de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ gozan de determinada propiedad y si $f_n \stackrel{\Omega}{\Longrightarrow} f$, entonces el límite f conserva esa propiedad; la tal propiedad sería hereditaria por paso al límite, por convergencia.

Si denotamos por $\mathcal{F}$ la familia de las funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que tiene esa determinada propiedad de interés, que la propiedad se herede por paso al límite equivale a que $\mathcal{F}$ sea cerrada en la topología de convergencia uniforme sobre compactos.

Los resultados básicos en este contexto son debidos a Hurwitz. Le anticipamos al lector que este conjunto de resultados conforma una suerte de *variaciones sobre un tema de Hurwitz*: una única idea elaborada desde distintos ángulos.

Teorema 5.25 (Teorema de Hurwitz, no se anulan.) *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que* no se anulan *en Ω y tal que $f_n \stackrel{\Omega}{\Longrightarrow} f$. Entonces el límite f asimismo no se anula en Ω, o f es la función nula.*

En otros términos, la familia $\mathcal{F}$ que consiste de la función idénticamente nula y de las funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que no se anulan en ningún punto Ω es una familia cerrada.

La sucesión de funciones $f_n(z) = e^z/n$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ está formada por funciones que no se anulan y su límite (uniforme sobre compactos) es la función nula, de manera que el límite (uniforme sobre compactos) de holomorfas que no se anulan puede ser la función nula.

demostración del teorema 5.25. Supongamos que la función límite f no es idénticamente nula, pero que se anula en un cierto $z_0 \in \Omega$. Por el principio de los ceros aislados, existe $r > 0$ tal que f no se anula en $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r)) \setminus \{z_0\}$. Podemos suponer que $r < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Tomemos $\delta > 0$ tal que

$$\delta \leq |f(z)|\,, \quad \text{si } |z - z_0| = r\,.$$

Queremos probar que f_n (para n apropiado), se anula en ese disco $\mathbb{D}(z_0, \varepsilon)$. Apelaremos al teorema de Rouché. La convergencia uniforme sobre el compacto $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ nos dice que para n suficientemente grande se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \delta/2\,, \quad \text{si } |z - z_0| = r\,.$$

Por tanto,

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|\,, \quad \text{si } |z - z_0| = r\,,$$

que por el teorema de Rouché nos da que f_n y f tienen el mismo número de ceros en $\mathbb{D}(z_0, r)$. Como f se anula en z_0, tenemos que f_n se ha de anular en el $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$, que contradice la hipótesis de que las f_n no se anulan en todo Ω. ■

Tenemos otros dos resultados de herencia, que se deducen como corolarios del teorema 5.25, pero que enunciamos como teoremas.

Teorema 5.26 (Teorema de Hurwitz, inyectivas) *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones* inyectivas *en $\mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$. Entonces f es asimismo inyectiva, o f es una función constante (de valor en* $\mathrm{cl}(\Omega)$*).*

En otros términos, la familia $\mathcal{F}$ que consiste de las funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que son inyectivas o son constantes es un familia cerrada.

La sucesión de funciones $f_n(z) = a + z/n$, $n \geq 1$, holomorfas en $\mathbb{D}$, donde a es una constante cualquiera, está formada por funciones inyectivas y su límite (uniforme sobre compactos) es la función constante a; de manera que el límite de funciones holomorfas inyectivas puede ser constante.

Demostración del teorema 5.26. Supongamos que la función límite f del enunciado no es constante. Veamos que f es inyectiva.

Sea $a \in \Omega$. Queremos ver que $f(z) \neq f(a)$ para todo $z \in \Omega$, $z \neq a$.

En el dominio $\Omega \setminus \{a\}$, las funciones $f_n - f_n(a)$ no se anulan, pues las funciones f_n son inyectivas. Además, como $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ y $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$, se tiene que

$$f_n - f_n(a) \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f - f(a)\,.$$

Por consiguiente, por el teorema 5.25 se deduce que, o bien $f - f(a)$ no se anula en $\Omega \setminus \{a\}$, como queremos, o bien $f - f(a) \equiv 0$, que diría que f es constante, que no es el caso. ■

Como segundo corolario del teorema 5.25, enunciamos:

Teorema 5.27 (Teorema de Hurwitz, rango dado) *Sean Ω y $\widehat{\Omega}$ dos dominios de $\mathbb{C}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f_n(\Omega) \subset \widehat{\Omega}$ y tal que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$. Entonces el límite f asimismo cumple que $f(\Omega) \subset \widehat{\Omega}$ o f es una función constante que toma como valor un punto de* $\mathrm{cl}(\widehat{\Omega})$.

En otros términos, la familia $\mathcal{F}$ que consiste de las funciones f en $\mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \widehat{\Omega}$, a las que añadimos las funciones constantes $f \equiv a$, con $a \in \mathrm{cl}(\widehat{\Omega})$, es una familia cerrada.

La sucesión de funciones $f_n(z) = z/n$ de funciones holomorfas en $\Omega = \mathbb{H}$ con valores en $\mathbb{H} = \widehat{\Omega}$ tiene como límite (uniforme sobre compactos) a la función constante $0 \in \partial\mathbb{H}$.

Observe, lector, que el teorema 5.25, de las funciones que no se anulan, es corolario de este teorema 5.27 tomando como $\widehat{\Omega} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración del teorema 5.27. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión como la del enunciado y supongamos que el límite f no es constante.

Fijemos $b \notin \widehat{\Omega}$. Para cada $n \geq 1$, la función $f_n - b$ no se anula en Ω, pues $f_n(\Omega) \subset \widehat{\Omega}$. Como $f - b$ no es idénticamente cero (pues estamos suponiendo que f no es constante), concluimos por el teorema 5.25 que $f - b$ no se anula en Ω. Por consiguiente, $b \notin f(\Omega)$. Como esta conclusión es cierta para todo $b \notin \widehat{\Omega}$, deducimos que $f(\Omega) \subset \widehat{\Omega}$.

Si el límite f fuera constante, digamos, $f \equiv a$, hemos de ver que $a \in \mathrm{cl}(\widehat{\Omega})$. Pero tomando un $z_0 \in \Omega$, observamos que los $f_n(z_0) \in \Omega$ convergen a $f(z_0) = a$, de manera que $a \in \mathrm{cl}(\widehat{\Omega})$. ■

☞ **Nota** 5.4.1. ☜ Un argumento que *casi* daría la conclusión del teorema 5.27 reza así. Supongamos que f no es constante. Como para cada $z \in \Omega$ se tiene que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, se deduce que $f(z) \in \mathrm{cl}(\widehat{\Omega})$, es decir, $f(\Omega) \subset \mathrm{cl}(\widehat{\Omega})$. Como f no es constante, el teorema de la aplicación abierta nos dice que $f(\Omega)$ es abierto, por tanto, $f(\Omega) \subset \mathrm{interior}(\mathrm{cl}(\widehat{\Omega}))$. Si $\mathrm{interior}(\mathrm{cl}(\widehat{\Omega})) = \widehat{\Omega}$, ya estaría, pero puede ser que $\mathrm{interior}((\mathrm{cl}(\widehat{\Omega})) \supsetneq \widehat{\Omega}$. Por ejemplo, si $\widehat{\Omega} = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, entonces $\mathrm{interior}(\mathrm{cl}(\widehat{\Omega})) = \mathbb{C}$. ♠

5.4.1. Ceros y convergencia

Supongamos que tenemos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos a una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, que no es la función nula. Nuestro objetivo e interés en este apartado es estudiar la relación entre los ceros de f y los ceros de las funciones aproximantes f_n.

El teorema 5.25 de herencia de Hurwitz nos dice que si ninguna de las f_n se anula en ningún punto de Ω, entonces la función f no se anula en ningún punto de Ω. Insistimos en que hemos supuesto que f no es la función nula.

Tenemos una suerte de recíproco de este teorema 5.25.

Teorema 5.28 *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$. Si f no se anulara en ningún punto de Ω, entonces para todo K compacto, $K \subset \Omega$, existe N tal que para todo $n \geq N$ la función f_n no se anula en ningún punto de K.*

demostración. Si no fuera cierto, existiría una subsucesión $(n_k)_{k\geq 1}$ de índices tal que f_{n_k} se anula en algún punto $z_{n_k} \in K$. Por compacidad de K podemos suponer que z_{n_k} converge a, digamos, $z \in K$.

Dado ε, por convergencia uniforme sobre K se tiene k_0 tal que, si $k \geq k_0$, entonces

$$|f(w) - f_{n_k}(w)| \leq \varepsilon\,, \quad \text{para todo } w \in K.$$

Tomando $w = z_{n_k}$, como $f_{n_k}(z_{n_k}) = 0$, se deduce que

$$|f(z_{n_k})| \leq \varepsilon\,, \quad \text{si } k \geq k_0\,.$$

Por continuidad de f concluimos que $f(z) = 0$, lo que supone una contradicción. ■

En realidad, este resultado no usa la holomorfía de las funciones f_n, tan solo su continuidad y la convergencia uniforme.

Así que, un tanto imprecisamente, el límite no tiene ceros si y sólo si los aproximantes no tienen ceros. En la dirección contraria, y por consiguiente, si la función límite se anula entonces las f_n han de anularse. Vamos ahora a precisar un poco dónde y cuánto se han de anularse las f_n.

Proposición 5.29 *Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que*

$$f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f \not\equiv 0\,.$$

Supongamos que f se anula en los puntos distintos $z_1, z_2, \ldots, z_k$ de Ω. Sean radios $\delta_j > 0$ tales que los discos $\mathbb{D}(z_j, \delta_j)$ sean disjuntos a pares y contenidos en Ω.

Entonces existe un entero $N \geq 1$ tal que, para cada $n \geq N$, se cumple que f_n tiene al menos un cero en cada $\mathbb{D}(z_j, \delta_j)$ para $1 \leq j \leq n$.

DEMOSTRACIÓN. Para $1 \leq j \leq k$, el teorema 5.25 de herencia aplicado en $\mathbb{D}(z_j, \delta_j)$ nos dice que existe N_j tal que, si $n \geq N_j$, la función f_n se ha de anular en $\mathbb{D}(z_j, \delta_j)$. Basta tomar $N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$. ■

Corolario 5.30 *Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que*

$$f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f \not\equiv 0\,.$$

Entonces, si $f(z_0) = 0$, existe una sucesión de índices n_j y de puntos $z_j \in \Omega$ tales que $f_{n_j}(z_j) = 0$ y $\lim_{j\to\infty} z_j = z_0$.

Supongamos que el dominio Ω es el disco unidad $\mathbb{D}$ y mantengamos que $(f_n)_{n=1}^\infty$ son funciones de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ tales que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$, que no es idénticamente nula.

Para $r \in (0,1)$ denotemos con $N(r)$ el número de ceros que f tiene en el disco cerrado $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$; análogamente, $N_n(r)$ para f_n, $n \geq 1$.

Proposición 5.31 *Con las notaciones anteriores, si f no se anula en $\partial\mathbb{D}(0,r)$, entonces*

$$N_n(r) = N(r)\,, \quad \text{para } n \geq m = m(r)\,.$$

En general,

$$\limsup_{n\to\infty} N_n(r) \leq N(r) \qquad y \qquad \sup_{s<r} N(s) \leq \liminf_{n\to\infty} N_n(s)\,.$$

Este enunciado precisa y amplía el teorema 5.25 de Hurwitz, al menos en el disco unidad: si las f_n no se anulan en $\mathbb{D}$, entonces para todo $r \in (0,1)$ se tiene que $N_n(r) = 0$ y por tanto $N(s) = 0$ para cada $s \in (0,1)$.

Obsérvese que $N(r) - \sup_{s<r} N(s)$ cuenta el número de ceros de f en la circunferencia $\{w; |w| = r\}$.

DEMOSTRACIÓN. Si f no se anula en $\partial\mathbb{D}(0,r)$, podemos contar el número de ceros $N(r)$ por el principio del argumento:

$$N(r) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw\,.$$

Si f no se anula en $\partial\mathbb{D}(0,r)$, entonces para un cierto $\eta > 0$ se tiene que $|f(w)| \geq \eta$, si $|w| = r$. Por convergencia uniforme sobre compactos, se tiene m tal que $|f_n(w) -$

$f(w)| \leq \eta/2$, para $n \geq m$ y para $|w| = r$, de manera que $|f_n(w)| \geq \eta/2$, para $n \geq m$ y para $|w| = r$, y f_n no se anula en $\partial\mathbb{D}(0,r)$, para $n \geq m$.

Por el principio del argumento, para $n \geq m$,

$$N_n(r) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \frac{f_n'(w)}{f_n(w)}\,dw\,.$$

Acotamos, para $n \geq m$ y $|w| = r$,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f_n'(w)}{f_n(w)} - \frac{f'(w)}{f(w)}\Big| &\leq \Big|\frac{(f_n'(w)-f'(w))f(w)}{f_n(w)f(w)}\Big| + \Big|\frac{(f_n(w)-f(w))f'(w)}{f_n(w)f(w)}\Big|\\ &\leq \frac{1}{\eta}\,\text{máx}\{|f_n'(u)-f'(u)|; |u|=r\}\\ &\quad + \frac{2}{\eta^2}\,\text{máx}\{|f_n(u)-f(u)|; |u|=r\}\,\text{máx}\{|f'(u)|\}\,.\end{aligned}$$

De donde, como $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$ y $f_n' \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f'$, se deduce la convergencia uniforme de f_n'/f_n a f'/f sobre $\partial\mathbb{D}(0,r)$ y, por tanto que

$$\lim_{n\to\infty} N_n(r) = N(r)\,.$$

Pero como $N(r)$ es un número natural, esto significa que $N_n(r) = N(r)$ de un n en adelante.

En general, para r fijo, tenemos que para un $\varepsilon_0 > 0$ la función f no se anula sobre $\partial\mathbb{D}(0, r+\varepsilon)$, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, y además que $N(r) = N(r+\varepsilon_0)$. Esto se sigue del principio de ceros aislados. Por tanto, si fijamos $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ tenemos que $N_n(r) \leq N_n(r+\varepsilon) = N(r+\varepsilon) = N(r)$, para $n \geq m(\varepsilon)$, de manera que

$$\limsup_{n\to\infty} N_n(r) \leq N(r)\,.$$

Si $s < r$, tomamos $t \in (s,r)$ de manera que f no se anule en $\partial\mathbb{D}(0,t)$, y por tanto para un cierto m se tiene que

$$N(t) = N_n(t)\,, \quad \text{si } n \geq m\,.$$

Por tanto,

$$N(s) \leq N_n(r)\,, \quad \text{si } n \geq m\,,$$

de donde

$$N(s) \leq \liminf_{n\to\infty} N_n(r).$$

Y como esto sucede para cualquier $s < r$, se deduce que

$$\sup_{s<r} N(s) \leq \liminf_{n\to\infty} N_n(r)\,.$$

■

5.5. Familias normales

El teorema de Montel da un criterio sencillo y muy útil para comprobar si una familia $\mathcal{F}$ de funciones de $\mathcal{H}(\Omega)$ es relativamente compacta.

Para familias $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas, en $\mathcal{H}(\Omega)$, es tradición usar el término de **familia normal**[4] para referirse a las familias relativamente compactas.

Teorema 5.32 (Teorema de Montel) *Sea $\mathcal{F}$ una familia en $\mathcal{H}(\Omega)$.*

La familia $\mathcal{F}$ es normal si y sólo si la familia $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre compactosde Ω.

En otras palabras, para familias de funciones holomorfas, la equicontinuidad es consecuencia de la acotación uniforme.

Como vamos a ver seguidamente el teorema de Montel se sigue de combinar el teorema de Ascoli–Arzelà con la fórmula de Cauchy. La clave de esta derivación yace en que la fórmula de Cauchy expresa la derivada de una función holomorfa f en términos de la integral de f sobre un la circunferencia de un disco y, por tanto, cotas de $|f|$ (de la acotación uniforme sobre compactos) se trasladan en cotas de $|f'|$ que implican la equicontinuidad sobre compactos: de manera que la acotación uniforme sobre compactos implica la equicontinuidad sobre compactos.

A la vista de los comentarios anteriores, al comparar el enunciado del teorema de Montel con el del teorema de Ascoli–Arzelà pudiera pensarse que en el teorema de Montel se puede substituir la acotación uniforme sobre compactos por la acotación puntual. Pero esto no es cierto. Se puede "construir" (apelando, por ejemplo, al teorema de aproximación de Runge) una sucesión de polinomios complejos $(p_n)_{n\geq 1}$ (por tanto, sucesión de funciones enteras, de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$) tales que $\lim_{n\to\infty} p_n(z) = 0$, si $z \neq 0$ y tal que $\lim_{n\to\infty} p_n(0) = 1$. Como esta sucesión converge en cada punto de $\mathbb{C}$, es a fortiori una sucesión puntualmente acotada, pero ninguna subsucesión suya puede converge uniformemente sobre compactos porque el límite no sería siquiera continuo.

☞ **Nota** 5.5.1. ☜ El teorema de Montel, con respecto al teorema de Ascoli–Arzelà, nos dice que para familias $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas la equicontinuidad (sobre compactos) es consecuencia de la acotación uniforme (sobre compactos).

El teorema de Banach–Steinhaus (principio de acotación uniforme) en la misma línea afirma que para familias $\mathcal{F}$ de funcionales lineales en un espacio de Banach la equicontinuidad es consecuencia de la acotación puntual. Véase la nota 5.5.2. ♠

☞ **Nota** 5.5.2. ☜ No nos resistimos a incluir, aunque sea en una nota, la extremadamente corta DEMOSTRACIÓN de Alan Sokal, [42], del principio de acotación uniforme.

La norma de un funcional lineal Λ en un espacio normado X es $\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\Lambda(x)|$ y también $\|\Lambda\|R = \sup_{\|x\|\leq R} |\Lambda(x)|$, para $R > 0$. De hecho,

[4] Todas las familias normales se parecen unas a otras; pero cada familia que no es normal tiene un motivo especial para sentirse desgraciada.

Lema 5.33 *Para cualquier $y \in X$ y $R > 0$ se tiene que* $\sup_{\|x-y\| \leq R} |\Lambda(x)| \geq \|\Lambda\| \, R$.

DEMOSTRACIÓN. Si $u \in X$, entonces $\frac{1}{2}\big(|\Lambda(y+u)|+|\Lambda(y-u)|\big) = \frac{1}{2}\big(|\Lambda(y+u)|+|\Lambda(u-y)|\big) \geq \|\Lambda(u)\|$. De manera que $\sup_{\|x-y\| \leq R} |\Lambda(x)| \geq \sup_{\|u\| \leq R} |\Lambda(u)| = \|\Lambda\| R$. ■

Suponemos ahora que X es de Banach y que $\sup_n \|\Lambda_n\| = +\infty$ Buscamos $\overline{x} \in X$ tal que $\sup_n |\Lambda_n(\overline{x})| = +\infty$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $\|\Lambda_n\| \geq 10^n$. Comenzando con $x_0 = 0$, usamos el lema anterior recursivamente, para obtener una sucesión x_n tal que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 5^{-n}$, para $n \geq 1$ y tal que

$$|\Lambda_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|\Lambda_n\| \, 5^{-n} \geq \frac{1}{2} \, 5^n \, .$$

Los x_n forman una sucesión de Cauchy, y como X es de Banach, los x_n convergen, digamos, a $\overline{x}$. Se tiene, de hecho, que $\|\overline{x} - x_n\| \leq \frac{1}{4} \, 5^{-n}$, para $n \geq 0$.

Ahora,

$$|\Lambda_n(\overline{x})| \geq |\Lambda_n(x_n)| - |\Lambda_n(\overline{x} - x_n)| \geq \frac{1}{2} \, \|\Lambda_n\| \, 5^{-n} - \|\Lambda_n\| \, \|\overline{x} - x_n\| \geq \|\Lambda_n\| \left(\frac{1}{2} \, 5^{-n} - \frac{1}{4} \, 5^{-n}\right).$$

■ ♠

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.32 DE MONTEL. Por el teorema de Ascoli–Arzelà, bastará probar que si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ está uniformemente acotada sobre compactos, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre compactos, o más simplemente, por el lema 5.6, que $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre discos cerrados contenidos en Ω.

Sea $\operatorname{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \subset \Omega$ y tomemos s tal que $r < s < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$.

Como $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre compactos,

$$M := \sup_{\substack{f \in \mathcal{F}; \\ w \in \mathbb{C}: |w-a|=s}} |f(w)| < \infty \, .$$

Sea $f \in \mathcal{F}$. Mediante la fórmula de Cauchy podemos expresar la derivada de f en el disco $\operatorname{cl}(\mathbb{D}(a,r))$ como integral de f sobre $\partial\mathbb{D}(a,s)$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w-a|=s} \frac{f(w)}{(w-z)^2} \, dw \, , \quad \text{para todo } z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \, ,$$

para acotar

$$|f'(z)| \leq \frac{s}{(s-r)^2} M \, , \quad \text{para todo } z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \, .$$

Si hacemos $L := \frac{s}{(s-r)^2} M$, tenemos entonces que

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \, , \quad \text{para todo } z_1, z_2 \in \operatorname{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \, .$$

Como esto es cierto para todo $f \in \mathcal{F}$ (la cota L no depende de $f \in \mathcal{F}$) tenemos, como queríamos demostrar, que $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre el disco $\operatorname{cl}(\mathbb{D}(a,r))$. ■

Se sigue directamente del teorema, 5.32, de Montel y dejamos apuntado en el siguiente corolario que la **normalidad es una propiedad local**.

Corolario 5.34 *Sea $\mathcal{F}$ una familia de $\mathcal{H}(\Omega)$. La familia $\mathcal{F}$ es normal en todo Ω si y sólo si, para todo $a \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $\mathbb{D}(a, r) \subset \Omega$ y tal que $\mathcal{F}$ es normal en $\mathbb{D}(a, r)$.*

EJEMPLO 5.5.1 *Sea Ω un dominio cualquiera. La familia $\mathcal{F}$ de funciones f de $\mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$ es normal, pero la familia $\mathcal{G}$ de funciones de $\mathcal{H}(\Omega)$ acotadas en módulo no es normal.*

Por supuesto, la familia $\mathcal{F}$ es normal pues, sin necesidad de descender a sus compactos[5], se tiene $|f(z)| < 1$, para todo $z \in \Omega$ y toda $f \in \mathcal{F}$.

La familia $\mathcal{G}$ no es normal, sin embargo, pues contiene a las constantes $g_n \equiv n$, para cada $n \geq 1$, por ejemplo. ♣

EJEMPLO 5.5.2 *Liouville como consecuencia de Montel.*

Vamos a derivar aquí el teorema de Liouville que dice que toda función entera acotada es constante como consecuencia del teorema de normalidad de Montel.

Sea f entera y acotada. Fijemos $a \in \mathbb{C}$. Para cada entero $n \geq 1$ definimos la función $g_n(z) = f(a + nz)$, digamos que para $z \in \mathbb{D}$. Como las funciones g_n están uniformemente acotadas, el teorema 5.32 de Montel dice que para una subsucesión (n_k) la subsucesión g_{n_k} converge uniformemente sobre compactos hacia una cierta función g holomorfa en $\mathbb{D}$. Por tanto, $g'_{n_k} \overset{\mathbb{D}}{\Longrightarrow} g'$ y, en particular,

$$n_k\, f'(a) = g'_{n_k}(0) \to g'(0)\,.$$

Esto implica que $f'(a) = 0$, y, por tanto, como a es arbitrario, que $f' \equiv 0$ y que f es constante. ♣

5.5.1. Normalidad y convergencia puntual

Para sucesiones extraídas de una familia normal, la convergencia puntual deviene en convergencia uniforme.

Lema 5.35 *Sea $\mathcal{F}$ una familia normal y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión extraída de $\mathcal{F}$.*

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existe para todo $z \in \mathbb{C}$.

Definamos la función g en Ω mediante

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \Omega\,.$$

Entonces, la función g es holomorfa en Ω y

$$f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} g\,.$$

[5] Sabemos de un colega que descendió a sus compactos, y no ha regresado. ¡Cuidado!

demostración. La holomorfía de g es consecuencia de la convergencia uniforme y del teorema 5.14 de Weierstrass.

Para la convergencia uniforme damos dos argumentos, dos.

1) La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente sobre compactos de Ω, digamos que $f_{n_k} \overset{\Omega}{\Longrightarrow} h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Como la convergencia uniforme sobre compactos implica la convergencia puntual, se tiene que $h \equiv g$ y, por tanto, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Finalmente, como de cualquier subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$ se extrae una (sub-)subsucesión que converge, y necesariamente lo hace hacia g, se deduce, por el lema 5.4, que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} g$.

2) La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre compactos. La convergencia uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ hacia g se deduce directamente de la proposición 5.8. ■

El lector atento y meticuloso habrá recordado en este punto que el corolario de la proposición 5.8 permitiría rebajar la hipótesis de convergencia puntual a convergencia puntual para los z en un conjunto denso de Ω. Pero en realidad, como vamos a ver a continuación, el principio de ceros aislados permite rebajar la hipótesis de convergencia puntual aún más; este es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 5.36 (Teorema de Vitali–Porter) [6] *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y sea A un subconjunto de Ω que tiene* un punto de acumulación en Ω.

Sea $\mathcal{F}$ una familia normal en $\mathcal{H}(\Omega)$.

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión extraída de $\mathcal{F}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) \quad \textit{existe en } \mathbb{C} \textit{ para todo } a \in A\,.$$

Entonces f_n converge uniformemente sobre compactos de Ω.

Además, si $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = 0$ para todo $a \in A$, entonces f_n converge uniformemente sobre compactos hacia 0.

demostración. Remedamos el primer argumento del lema 5.35. Para anclar el argumento, tomemos una subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente, digamos, hacia $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Apelamos ahora al (sencillo) criterio de convergencia 5.4, a cuya consulta instamos al lector. De cualquier subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ podemos extraer una (sub)subsucesión convergente, digamos hacia h. Como $g(a) = h(a)$ para todo $a \in A$ y A tiene acumulación en Ω, el principio de los ceros aislados nos confirma que $g \equiv h$. En consecuencia, la sucesión completa $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia g.

Finalmente, si $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = 0$ para todo $a \in A$, la función límite g cumple que $g(a) = 0$, para todo $a \in A$. De nuevo, el principio de los ceros aislados corrobora que $g \equiv 0$. ■

[6] El artículo de Porter a este respecto es [35].

Ejemplo 5.5.3 *Ilustración del uso del teorema* 5.36 *de Vitali–Porter: la convergencia*

$$\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n \overset{\mathbb{C}}{\Longrightarrow} e^z\,.$$

Partimos tan sólo, y ésta es la gracia de la argumentación de este ejemplo, de la mera y pura definición del número e:

$$(\star)\quad e=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Para cada $n\ge 1$ definimos el polinomio $P_n(z)=(1+z/n)^n$ y tomamos como f_n la función entera dada por $f_n(z)=P_n(z)-e^z$, para $z\in\mathbb{C}$. Tomamos como conjunto A, del enunciado del teorema de Vitali–Porter, a $A=\{1/k : k\in\mathbb{Z}, k\ge 1\}\cup\{0\}$.

Si $k\in\mathbb{Z}, k\ge 1$, tenemos que

$$e=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{kn}\Big)^{k\,n},$$

pues los kn son una subsucesión de los n en $(\star)$. En otro términos, para cada $k\in\mathbb{Z}$, $k\ge 1$, se tiene que

$$e^{1/k}=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{kn}\Big)^n.$$

Así que, para $k\in\mathbb{Z}$, $k\ge 1$, tenemos que $\lim_{n\to\infty}P_n(1/k)=e^{1/k}$, y como además $P_n(0)=1=e^0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}P_n(a)-e^a=0\,,\quad \text{para todo } a\in A\,.$$

En cuanto a la acotación uniforme sobre compactos (para así verificar que las P_n forman una familia normal) observe, lector, que como $1+x\le e^x$, para todo $x\in\mathbb{R}$,

$$|P_n(z)|\le\Big(1+\frac{|z|}{n}\Big)^n\le e^{(|z|/n)n}=e^{|z|}\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C},\, n\ge 1\,,$$

y

$$|P_n(z)-e^z|\le 2e^{|z|}\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C},\, n\ge 1\,.$$

Observe, lector, que, de camino y como consecuencia, se obtiene que $(1+x/n)^n\to e^x$, cuando $n\to\infty$, para todo $x\in\mathbb{R}$. ♣

Le sugerimos al lector inquieto que consulte, en este punto, el ejercicio 5.6.17 donde se propone otra ilustración interesante, un teorema de Montel, del uso del teorema 5.36 de Vitali–Porter.

5.5.2. Normalidad de familias en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$

Vamos a prestar atención en este apartado al espacio $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ de las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es una familia en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Para cada $r \in [0,1)$, definimos

$$M_{\mathcal{F}}(r) = \sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{F} \text{ y } |z| \le r\}.$$

Esta expresión es creciente con r.

Es conveniente expresar la normalidad de la familia $\mathcal{F}$ en términos de $M_{\mathcal{F}}(r)$.

Lema 5.37 *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ es normal si y sólo para cada $r \in [0,1)$ se tiene que $M_{\mathcal{F}}(r) < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue simplemente de que, para cualquier compacto $K \subset \mathbb{D}$, se tiene que $K \subset \text{cl}(\mathbb{D}(0,r))$ para algún $r < 1$. ■

EJEMPLO 5.5.4 *Consideremos la familia $\mathcal{D}$ (que se dice de Dirichlet) de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ tales que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)|^2 \le 1\,,$$

donde $(a_n(f))_{n\ge 0}$ es la sucesión de los coeficientes del desarrollo de Taylor de f alrededor del origen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

La familia $\mathcal{D}$ es normal. Por cierto, la $\mathcal{D}$ hace honor a Dirichlet.

Si $f \in \mathcal{D}$ y $z \in \mathbb{D}$, se tiene, aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, que

$$|f(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)||z|^n \le \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)|^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n}} \le \sqrt{\frac{1}{1-|z|^2}}\,.$$

Por consiguiente,

$$M_{\mathcal{D}}(r) \le \sqrt{\frac{1}{1-r^2}}\,, \quad \text{para todo } r \text{ tal que } 0 \le r < 1\,.$$

El lema 5.37 nos da la normalidad de $\mathcal{D}$. ♣

EJEMPLO 5.5.5 *Teorema de Schottky y normalidad.*

Fijemos $\Delta > 1$. Consideremos la familia $\mathcal{K}_\Delta$ de las funciones holomorfas f en $\mathbb{D}$ que omiten $\{0,1\}$ y tales que $\frac{1}{\Delta} \le |f(0)| \le \Delta$, es decir, tales que $|\ln|f(0)|| \le \ln \Delta$.

Comprobemos que esta familia $\mathcal{K}_\Delta$ es normal.

El teorema 4.41 de Schottky nos da que, si $f \in \mathcal{K}_\Delta$ y $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$|\ln|f(z)|| \le A(1+\ln(\Delta))\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)^4 .$$

Por consiguiente,

$$M_{\mathcal{K}_\Delta}(r) \le \exp\Big[A(1+\ln(\Delta))\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big)^4\Big], \quad \text{si } 0 \le r \le 1 .$$

El lema 5.37 nos da ahora la anticipada normalidad de $\mathcal{K}_\Delta$. ♣

¿Cuál es el papel de ese Δ?, se estará preguntando el lector. En la prueba anterior el papel de Δ está claro: lo requiere Schottky, pues en su cota aparece $|\ln|f(0)|$. Aún así; consideremos la familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que omiten $\{0,1\}$. Sea $(f_n)_{n\ge1}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{F}$. Analicemos la sucesión numérica $(f_n(0))_{n\ge1}$. Si para un cierto $\Delta > 1$ se tiene $(1/\Delta) \le |f_n(0)| \le \Delta$, entonces las f_n pertenecen a la familia normal $\mathcal{K}_\Delta$ y por tanto las f_n admiten una subsucesión convergente en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Pero si no es ése el caso, entonces es porque hay una subsucesión $(f_{n_k})_{k\ge1}$ tal que [*caso* 0]: $f_{n_k}(0) \to 0$ cuando $k \to \infty$, o tal que [*caso* ∞]: $f_{n_k}(0) \to \infty_{\mathbb{C}}$ cuando $k \to \infty$.

En el caso 0, consideremos $g_k \equiv 1 - f_{n_k}$, que asimismo son holomorfas en $\mathbb{D}$ y omiten $\{0,1\}$. Como $g_k(0) \to 1$ cuando $k \to \infty$, tenemos que $g_k \in \mathcal{K}_{1/2}$ de un k en adelante. Y, por tanto, por normalidad, los g_k tienen una subsucesión convergente en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. El teorema 5.27 de herencia de Hurwitz nos dice que el único límite posible ha de ser la función constante 1, así que $g_k \stackrel{\Omega}{\Longrightarrow} 1$. En otros términos, la sucesión $(f_n)_{n\ge1}$ tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ hacia 0.

En el caso $\infty_{\mathbb{C}}$, consideramos las funciones $h_k \equiv 1/f_{n_k}$. Estas h_k son funciones holomorfas que omiten $0, 1$. El caso 0 nos dice que $h_k \stackrel{\Omega}{\Longrightarrow} 0$. En otros términos, la sucesión $(f_n)_{n\ge1}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia $\infty_{\mathbb{C}}$.

Así que de cualquier sucesión $(f_n)_{n\ge1}$ de $\mathcal{F}$ se puede extraer una sucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite $\{0,1\}$, hacia la constante 0, hacia la constante 1, o… hacia $\infty_{\mathbb{C}}$.

En puridad no podemos decir que $\mathcal{F}$ es normal, pues esa posible convergencia a $\infty_{\mathbb{C}}$, no lo permite[7]. Pero, en realidad, ¿verdad, lector?, la familia $\mathcal{F}$ cumple el requisito de ser relativamente compacta, sólo que hay que añadir la constante $\infty_{\mathbb{C}}$ como posible límite. La noción de familia normal de funciones *meromorfas* abarcará sin mayores dificultades ese límite especial, véase el apartado 5.6 y, en particular, el teorema 5.46 de Montel–Carathéodory.

Ejemplo 5.5.6 *Sea $\mathcal{C}$ la familia de las funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ que tienen parte real positiva y tales que $f(0) = 1$. La familia $\mathcal{C}$ es normal. La $\mathcal{C}$ hace honor a Carathéodory.*

[7] Y somos obedientes.

Si $f \in \mathcal{C}$, entonces f está subordinada a $z \longmapsto (1+z)/(1-z)$, y el lema 4.23 nos dice que

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

En otros términos,

$$M_{\mathcal{C}}(r) \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad \text{si } 0 \leq r < 1,$$

lo que, por el lema 5.37, nos da la normalidad. ♣

Conviene insistir en que si no se exige que $f(0) = 1$, la familia resultante $\mathcal{F}$ de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ con parte real positiva *no* es normal, pues, por ejemplo, las funciones constantes $f_n \equiv n$, para $n \geq 1$, pertenecen a $\mathcal{F}$.

Normalidad y series de potencias

Consideremos una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$. Para $f \in \mathcal{F}$ y entero $n \geq 0$ denotamos por $a_n(f)$ al n-ésimo coeficiente del desarrollo de Taylor de f alrededor de $z = 0$. Definimos además

$$A_n = \sup_{f \in \mathcal{F}} |a_n(f)|, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Proposición 5.38 *La familia $\mathcal{F}$ es normal si y sólo si*

1) $A_n < +\infty$*, para cada* $n \geq 0$.
2) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} \leq 1$.

demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal. Para $r \in (0,1)$ sea

$$M_{\mathcal{F}}(r) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq r, \, f \in \mathcal{F}\}.$$

Para cada $r \in (0,1)$, se tiene que $M_{\mathcal{F}}(r) < +\infty$.

La fórmula de Cauchy nos dice que si $r \in (0,1)$, $f \in \mathcal{F}$ y $n \geq 0$, entonces

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dz,$$

y por tanto que

$$|a_n(f)| \leq \frac{M_{\mathcal{F}}(r)}{r^n}.$$

Por consiguiente,

$$A_n \leq \frac{M_{\mathcal{F}}(r)}{r^n}, \quad \text{para } r \in (0,1) \text{ y } n \geq 0.$$

Esta acotación nos dice primero que cada $A_n < +\infty$ y además que, tomando raíz n-ésima y luego aplicando $\limsup$, que

$$(\star) \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} \leq \frac{1}{r} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_{\mathcal{F}}(r)} \leq \frac{1}{r}, \quad \text{para } r \in (0,1).$$

Note, lector, que si $M_{\mathcal{F}}(r) = 0$ (que corresponde a la situación trivial en que $\mathcal{F}$ sólo contiene a la función 0), entonces $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_{\mathcal{F}}(r)} = 0$, mientras que en cualquier otro caso, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_{\mathcal{F}}(r)} = 1$.

Como ($\star$) es válida para todo $r \in (0,1)$ se deduce que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} \le 1\,.$$

Supongamos, para la comprobación de la implicación recíproca, que se cumplen las condiciones 1) y 2). Sea $f \in \mathcal{F}$ y $|z| \le r < 1$:

$$|f(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)|\,|z|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, r^n\,.$$

Por tanto, para $r \in (0,1)$ se tiene que

$$M_{\mathcal{F}}(r) \le \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, r^n\,.$$

Fijemos $r \in (0,1)$ y sea $t > 1$ tal que $tr < 1$. Existe un entero $N \ge 0$ tal que si $n > N$ entonces $A_n < t^n$. De manera que

$$M_{\mathcal{F}}(r) \le \sum_{n=0}^{N} A_n\, r^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} (t\,r)^n,$$

y esta cota es finita puesto que $tr < 1$ y $A_n < +\infty$ para $0 \le n \le N$.

Por tanto para cada $r \in (0,1)$ se tiene que $M_{\mathcal{F}}(r) < +\infty$, de manera que $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre compactos de $\mathbb{D}$, es decir, $\mathcal{F}$ es una familia normal. ■

Sea $\mathcal{F}$ una familia normal de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ y sea $A_n = \sup_{f\in\mathcal{F}} |a_n(f)|$, para $n \ge 0$. La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, z^n\,,$$

tiene radio de convergencia al menos 1, pues $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} \le 1$, así que la serie de potencias define una función holomorfa F en $\mathbb{D}$. Además se tiene que

$$(\dagger) \qquad |f(z)| \le F(|z|)\,, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{D} \text{ y cada } f \in \mathcal{F}\,.$$

Recíprocamente, si para una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ existe una función F holomorfa en $\mathbb{D}$ *dominante* en el sentido de que la acotación ($\dagger$) se cumple, entonces la familia $\mathcal{F}$ es normal. Compare, lector, estas observaciones con el lema 5.37.

Estas observaciones invitan, y hasta incitan, ¿verdad, lector?, a intentar especificar los A_n de una familia $\mathcal{F}$ normal dada. Pero le advertimos, lector, de que ésta no es, en general, una tarea fácil. Veamos unos cuantos ejemplos al respecto.

EJEMPLO 5.5.7 *Para la familia $\mathcal{B}$ de funciones f en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ tales que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, se tiene que $A_n = 1$ para cada $n \geq 0$.*

La fórmula de Cauchy nos da directamente que $|a_n(f)| \leq 1$, si $f \in \mathcal{B}$ y si $n \geq 0$. Por tanto $A_n \leq 1$, para cada $n \geq 0$. Para $n \geq 1$, la función z^n nos dice que, de hecho, $A_n = 1$. Para $n = 0$ las constantes $f \equiv a \in \mathbb{D}$ nos dan asimismo que $A_0 = 1$.

La función $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_N z^n = 1/(1-z)$, en efecto, cumple como debe que

$$|f(z)| \leq F(|z|) = \frac{1}{1-|z|}\,, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{B} \text{ y } z \in \mathbb{D}.$$

Pero obviamente esta acotación es (muy) holgada. ♣

EJEMPLO 5.5.8 *Para la familia $\mathcal{C}$ de funciones en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ con parte real positiva y con $f(0) = 1$, se tiene $A_0 = 1$ y $A_n = 2$, para cada $n \geq 1$.*

Por cierto, estas cotas para $\mathcal{C}$ son un resultado de Carathéodory, a quien alude la notación $\mathcal{C}$.

El ejemplo 5.5.6 nos dice que la familia $\mathcal{C}$ es una familia normal. Como todas las funciones $f \in \mathcal{C}$ satisfacen $f(0) = 1$, es obvio que $A_0 = 1$.

La función

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{D}$$

es de la familia $\mathcal{C}$. Por tanto, $A_n \geq 2$, para $n \geq 1$.

Sea ahora $g \in \mathcal{C}$ y supongamos que g es holomorfa en $\mathbb{D}(0, R)$, para un cierto $R > 1$. Probaremos que $|a_n(g)| \leq 2$, para $n \geq 1$. Con esto bastará, porque si $f \in \mathcal{C}$ y si $r \in (0, 1)$ entonces $g(z) = f(rz)$ también está en la familia $\mathcal{C}$, pero además es holomorfa en $\mathbb{D}(0, 1/r)$, y por tanto se tendría que

$$|a_n(f)| = \frac{1}{r^n}\,|a_n(g)| \leq 2\,\frac{1}{r^n}\,;$$

haciendo $r \uparrow 1$ se obtendría que $|a_n(f)| \leq 2$, para $n \geq 1$.

El siguiente lema es la clave:

Lema 5.39 *Sea g holomorfa en $\mathbb{D}(0, R)$ para un $R > 1$. Denotemos: $u \equiv \Re(f)$ y $v \equiv \Im(f)$, de manera que $g \equiv u + \imath v$. Entonces, para $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{\imath\vartheta})\, e^{-\imath n\vartheta}\, d\vartheta \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{\imath\vartheta})\, e^{-\imath n\vartheta}\, d\vartheta = \frac{2\,\imath}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{\imath\vartheta})\, e^{-\imath n\vartheta}\, d\vartheta\,. \end{aligned}$$

Este lema es en realidad reflejo directo de las ecuaciones de Cauchy–Riemann en el cálculo de los coeficientes de Taylor mediante la fórmula de Cauchy.

Antes de dar la demostración del lema, completemos el análisis del presente ejemplo. En ese caso en que $g \in \mathcal{C}$, la función $u = \Re(g)$ es positiva. Además, como $a_0 = f(0) = 1$, se tiene que

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{\imath\vartheta})\, d\vartheta\,.$$

Por el lema 5.39, y usando que u es positiva, tenemos entonces

$$|a_n(g)| = \Big|\frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{\imath\vartheta}) e^{-\imath n\vartheta}\, d\vartheta\Big| \le \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{\imath\vartheta})\, d\vartheta = 2\,,$$

que da el resultado buscado para concluir que en la familia $\mathcal{C}$ se tiene que $A_n = 2$, para $n \ge 1$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 5.39. Aplicando la fórmula de Cauchy a g en $\partial\mathbb{D}$, obtenemos que

$$(\star) \qquad a_n(g) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w|=1} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{\imath\vartheta})\, e^{-\imath n\vartheta}\, d\vartheta\,, \quad \text{para } n \ge 0\,.$$

Note, lector, que esta expresión es válida para $n \ge 0$.

Para $n \ge 1$, la función $g(z)z^{n-1}$ es holomorfa en $\mathbb{D}(0,R)$, así que su integral sobre $\partial\mathbb{D}$ ha de anularse, por el teorema de Cauchy, es decir,

$$(\dagger) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w|=1} g(w) w^{n-1}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{\imath\vartheta})\, e^{\imath n\vartheta}\, d\vartheta\,, \quad \text{para } n \ge 1\,.$$

Observe, lector, que esta expresión $(\dagger)$ es válida para $n \ge 1$.

Fijemos $n \ge 1$. Si a la identidad $(\star)$ le sumamos el conjugado de la identidad $(\dagger)$, obtenemos que

$$a_n(g) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{\imath\vartheta})\, e^{-\imath n\vartheta}\, d\vartheta\,.$$

Si a la identidad $(\star)$ le restamos el conjugado de la identidad $(\dagger)$, obtenemos que

$$a_n(g) = \frac{2\imath}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{\imath\vartheta})\, e^{-\imath n\vartheta}\, d\vartheta\,.$$

■

☞ **Nota** 5.5.3. ☜ Sumando y restando las expresiones$(\star)$ y $(\dagger)$ obtenemos, adicionalmente,

$$\left.\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{\imath\vartheta}) \cos(n\vartheta)\, d\vartheta\,, \\ \imath a_n(g) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{\imath\vartheta}) \operatorname{sen}(n\vartheta)\, d\vartheta\,, \end{aligned}\right. \quad \text{para } n \ge 1\,.$$

♠

Observemos que, para la clase $\mathcal{C}$, la función dominante

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, z^n = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1+2\Big(\frac{1}{1-z}-1\Big)=\frac{1+z}{1-z}\,, \quad z\in\mathbb{D}\,,$$

pertenece a la familia $\mathcal{C}$. Así que en este caso

$$M_{\mathcal{C}}(r)=F(r)\,, \quad \text{para } 0\le r<1\,.$$

Continuando, sí, lector, con este ejemplo, damos ahora una demostración alternativa, pero, como diría[8] Littlewood, en el espíritu de y *de corte de la teoría de funciones*, de que $A_n\le 2$, para $n\ge 2$. Regodéese, lector, apreciando la sutil elegancia del argumento.

Si $f\in\mathcal{C}$, entonces f está subordinada a la función $F(z)=(1+z)/(1-z)$, para $z\in\mathbb{D}$. Y, por tanto, para cualquier $f\in\mathcal{C}$ se tiene que que

$$|f'(0)|\le|F'(0)|=2\,.$$

Fijemos $N\ge 1$ y sea $\omega_N=e^{2\pi\imath/N}$ la raíz N-ésima de la unidad. Consideremos la función

$$g_N(z)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(z\,\omega_N^j)\,, \quad \text{para } z\in\mathbb{D}.$$

Esta g_N es holomorfa en $\mathbb{D}$, y de hecho $g_N\in\mathcal{C}$. Pero además, para los coeficientes de Taylor de g_N se cumple que

$$a_n(g_N)=\begin{cases}0\,, & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } N,\\ a_n(f)\,, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } N.\end{cases}$$

Por tanto, podemos escribir

$$g_N(z)=h_N(z^N)\,,$$

donde h_N es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, que además cumple que $h_N(0)=g_N(0)=f(0)=1$ y que $\Re(h_N(z))>0$ para todo $z\in\mathbb{D}$. Es decir, $h_N\in\mathcal{C}$.

Observe, lector, que $a_1(h_N)=a_N(g_N)=a_N(f)$, y que, por consiguiente,

$$|a_N(f)|=|a_1(h_N)|\le 2\,,$$

que es justo lo que se quería comprobar. ♣

Ejemplo 5.5.9 *La clase*[9] $\mathcal{S}$ *de funciones en* $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ *inyectivas y normalizadas con* $f(0)=0$ *y* $f'(0)=1$.

En el argot de los aficionados a la variable compleja, a las funciones inyectivas se les dice *univalentes*. La clase se denota $\mathcal{S}$ en referencia a «*schlicht*», el calificativo en alemán para designar a las funciones univalentes.

[8] Como diría, no; como dice Littlewood. Véase [9], página 115.

[9] ¡Tradición! Esta es la clase $\mathcal{S}$ y no la familia $\mathcal{S}$. No se diga más.

La función K, conocida como **función de Koebe**, y definida por

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{para } z \in \mathbb{D}\,,$$

es de la clase $\mathcal{S}$ y lleva biyectivamente el disco $\mathbb{D}$ sobre el dominio $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$, es decir, el plano al que le hemos quitado el intervalo real semiinfinito que va desde $-\infty$ hasta $-1/4$. De hecho, K es la composición

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{D} &\longmapsto \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{H} \\ &\longmapsto \Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)^2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ &\longmapsto \frac{1}{4}\Big(\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)^2 - 1\Big) = K(z) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4], \end{aligned}$$

donde cada uno de los pasos es biyectivo.

El desarrollo en serie de potencias de la función K alrededor de $z = 0$ es

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{D}\,.$$

Esto se deduce de que como

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,,$$

entonces

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \Big(\frac{1}{1-z}\Big)' = \sum_{n=1} n z^{n-1}\,.$$

Como $K \in \mathcal{S}$, se deduce que

$$A_n \ge n\,, \quad \text{para } n \ge 0\,.$$

Ludwig Bieberbach probó en 1916 que $A_2 = 2$ y conjeturó que $A_n = n$ para $n \ge 3$. Tras verificación de algunos casos particulares, como $n = 3$, $n = 4$, con técnicas de interés más general que la mera confirmación de estos casos, la conjetura de Bieberbach se transformó en el teorema de Louis de Branges en 1984. ♣

Ejemplo 5.5.10 *La clase $\mathcal{B}^\star$ de funciones en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ tales que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$, es decir, funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ acotadas en módulo por 1 y que no se anulan.*

Obviamente $\mathcal{B}^\star$ es una familia normal, pues está uniformemente acotada.

Es claro que $A_0 = 1$ y que $A_n \le 1$, para cada $n \ge 1$, pues $\mathcal{B}^\star \subset \mathcal{B}$.

La función f definida por $f(z) = \exp((z-1)/(z+1))$, para $z \in \mathbb{D}$, es de la familia $\mathcal{B}^\star$, pues la transformación de Möbius $z \longmapsto (z-1)/(z+1)$ lleva el disco unidad $\mathbb{D}$ sobre el semiplano izquierdo. Además $f(0) = 1/e$ y $f'(0)) = 2/e$.

Para cada $n \geq 1$, consideremos la función $g_n(z) = f(z^n)$, para $z \in \mathbb{D}$, que también es de la familia $\mathcal{B}^\star$. Observe, lector, que

$$a_n(g_n) = a_1(f) = \frac{2}{e}\,, \quad \text{para cada } n \geq 1\,.$$

Por consiguiente, $A_n \geq 2/e$, para cada $n \geq 1$ y, por tanto,

$$\frac{2}{e} \leq A_n \leq 1\,.$$

No se conocen los valores de los A_n (por lo menos, en el momento actual en que el humilde escriba de estas notas las está transcribiendo). La conjetura de Jan Krzyż, de 1968, es que para cada $n \geq 1$ se cumple que $A_n = 2/e$. ♣

Normalidad y subordinación

Sea g una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Definamos la clase $\mathcal{F}_g$ en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ que consta de todas aquellas funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ subordinadas a g.

La familia $\mathcal{F}_g$ es normal. Basta observar que para toda $f \in \mathcal{F}_g$ tenemos que

$$f\big(\operatorname{cl}(\mathbb{D}(0,r))\big) \subset g\big(\operatorname{cl}(\mathbb{D}(0,r))\big)\,;$$

por tanto,

$$M_{\mathcal{F}_g}(r) = \text{máx}\{|g(z)|; |z| = r\}\,,$$

y estamos en la situación del lema 5.37.

Supongamos que Ω es un dominio simplemente conexo y que $a \in \Omega$. El teorema 6.1 de la aplicación de Riemann nos dice que existe una función g holomorfa en $\mathbb{D}$ y biyectiva sobre Ω y tal que $g(0) = a \in \Omega$. Por consiguiente, la familia $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(\Omega,a)}$:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega); f(\mathbb{D}) \subset \Omega\,,\ f(0) = a\}$$

es una familia normal.

El siguiente lema nos dice que la subordinación es una operación cerrada respecto de la convergencia uniforme sobre compactos.

Lema 5.40 *Sean $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$, dos sucesiones de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que*

- $f_n \overset{\mathbb{D}}{\Longrightarrow} f$ *y* $g_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} g$*, cuando* $n \to \infty$*,*
- $f_n(0) = g_n(0)$*, para cada* $n \geq 1$*,*
- $f_n \prec g_n$*, para cada* $n \geq 1$*.*

Entonces $f \prec g$*.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \geq 1$, podemos escribir $f_n = g_n \circ \omega_n$, donde ω_n es holomorfa en $\mathbb{D}$ y es tal que $\omega_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $\omega_n(0) = 0$.

El teorema de Montel nos da que para una sucesión creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ se tiene que

$$\omega_{n_k} \overset{\mathbb{D}}{\Longrightarrow} \omega\,, \quad \text{cuando } k \to \infty\,,$$

donde ω es una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Nótese que $\omega(0) = 0$ y que $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Para cada $z \in \mathbb{D}$ y $k \geq 1$ se tiene que

$$f_{n_k}(z) = g_{n_k}(\omega_{n_k}(z))\,.$$

Fijemos $z \in \mathbb{D}$. Como $g_{n_k} \overset{\mathbb{D}}{\Longrightarrow} g$ y $\omega_{n_k}(z) \to \omega(z) \in \mathbb{D}$, cuando $k \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(\omega_{n_k}(z)) = g(\omega(z))\,,$$

y como

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = f(z)\,,$$

se concluye que

$$f(z) = g(\omega(z))\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

y, en particular, que $f \prec g$. ■

5.5.3. Familias compactas

Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es compacta si es relativamente compacta, es decir, normal, y además es cerrada.

El teorema de Montel nos dice cuándo se tiene la compacidad relativa.

Para que una familia sea cerrada se requiere que la propiedad definitoria de la familia $\mathcal{F}$ se herede por paso al límite. Los teoremas de Hurwitz dan ejemplos de varias tales propiedades: el límite o hereda esa propiedad o es constante; así que hará falta que la propiedad definitoria de $\mathcal{F}$ prevenga que los potenciales límites sean constantes.

Aquí, por su relevancia ulterior, vamos considerar en el siguiente ejemplo, la propiedad de inyectividad.

EJEMPLO 5.5.11 *Sea Ω un dominio, a un punto $a \in \Omega$ y un número $\delta > 0$. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega, a, \delta)$ la familia de funciones holomorfas en Ω tales que*

1) *son inyectivas,*
2) $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$,
3) $|f'(a)| \geq \delta$.

La familia $\mathcal{F}$ es compacta.

La familia $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre todo Ω, así que es relativamente compacta. Por Hurwitz, teorema 5.26, tenemos que si $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ es tal que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} g \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces g es inyectiva o es constante. Pero como $f_n' \overset{\Omega}{\Longrightarrow} g'$, se tiene que

$$|g'(a)| = \lim_{n\to\infty} |f_n'(a)| \geq \delta\,,$$

y, por tanto g no es constante y, además, $g \in \mathcal{F}$. ♣

En la demostración del teorema 6.1 de la aplicación de Riemann, estas familias $\mathcal{F}$ probarán más allá de toda duda su gallarda valía y su noble linaje.

5.6. Funciones meromorfas: convergencia y normalidad

Vamos a abordar a continuación la convergencia de funciones meromorfas y la noción de normalidad de familias de funciones meromorfas. Respecto del estudio que ya hemos llevado a cabo para funciones holomorfas, el que sigue para funciones meromorfas es muy paralelo con una serie similar de teoremas, y a la vez muy subsidiario de aquél.

Habida cuenta de este subsidiario paralelismo, el ritmo de la presentación será algo más ligero que el habitual. Le prestaremos somera atención a ciertos detalles menores, firmemente convencidos de que sin mayores dificultades los podrá ir perfilando según los va encontrado.

Sea Ω un dominio en el plano complejo $\mathbb{C}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{M}(\Omega)$ de las funciones meromorfas en Ω. Recordemos que f es meromorfa en Ω si f es holomorfa en $\Omega \setminus P$, donde P es un conjunto sin acumulación en Ω tal que en cada uno de los puntos de P la función f tiene un polo. Es decir, f solo tiene singularidades aisladas en Ω, ninguna de las cuales es una singularidad esencial.

Recordemos que el conjunto $\mathcal{M}(\Omega)$ es un cuerpo, pues si $f \neq 0$ entonces $1/f$ es meromorfa, con ceros en los polos de f y polos en los ceros de f.

5.6.1. Plano extendido $\widehat{\mathbb{C}}$

El **plano extendido** $\widehat{\mathbb{C}}$ es el plano complejo $\mathbb{C}$ al que «se añade»$\infty_{\mathbb{C}}$, es decir,

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}.$$

A $\widehat{\mathbb{C}}$ le dotamos de la topología de compactificación de un punto, que se construye a partir de la de $\mathbb{C}$ añadiendo como base de entornos de $\infty_{\mathbb{C}}$ a las regiones

$$\{z \in \mathbb{C}; |z| \geq r\} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}$$

para $r > 0$. Con esta topología, $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto.

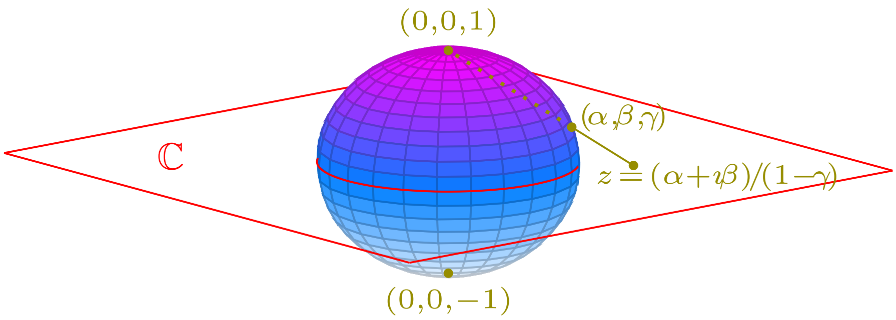
Podemos considerar, y consideramos, a las funciones meromorfas en Ω como funciones continuas de Ω en $\widehat{\mathbb{C}}$.

La proyección estereográfica Π, tomada desde el polo norte $(0,0,1) \in \mathbb{S}^2$, lleva la esfera unidad $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ biyectivamente sobre el plano extendido $\widehat{\mathbb{C}}$. En ecuaciones, la proyección Π viene dada por

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{S}^2 \longmapsto \Pi(\alpha,\beta,\gamma) = x + \imath y \in \mathbb{C}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} x &= \dfrac{\alpha}{1-\gamma}, \\ y &= \dfrac{\beta}{1-\gamma}, \end{cases}$$

y además, con

$$\Pi(0,0,1) = \infty_{\mathbb{C}}\,.$$



Esta biyección Π permite identificar la esfera unidad $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ con $\widehat{\mathbb{C}}$. La proyección estereográfica es un homeomorfismo de $\mathbb{S}^2$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$: la imagen mediante Π de los casquetes polares (del polo $(0,0,1)$) son la base de entornos de $\widehat{\mathbb{C}}$ que hemos introducido más arriba.

Al plano extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ se le conoce también, en ambiente complejos, como **esfera de Riemann**.

Distancia esférica y distancia cordal

En el plano extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ definimos la **distancia cordal** mediante

$$c(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\,\sqrt{1+|w|^2}}\,, \quad \text{para } z,w \in \mathbb{C}\,,$$

y

$$c(z,\infty_{\mathbb{C}}) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}\,.$$

Notemos que $c(z,0) = \frac{2|z|}{\sqrt{1+|z|^2}}$, para cada $z \in \mathbb{C}$. Y que $c(0,\infty_{\mathbb{C}}) = 2$.

La razón del nombre es que $c(z,w)$ es la longitud del segmento en $\mathbb{R}^3$ que conecta $\Pi^{-1}(z)$ con $\Pi^{-1}(w)$, es decir, la longitud de la cuerda que conecta $\Pi^{-1}(z)$ con $\Pi^{-1}(w)$.

La topología dada por esta distancia cordal en $\widehat{\mathbb{C}}$ es la topología de la compactificación de un punto que hemos descrito más arriba.

☞ **Nota** 5.6.1. ☜ La distancia cordal no es una distancia riemanniana. ♠

Si proyectamos la métrica riemanniana usual de $\mathbb{S}^2$ de curvatura $+1$ vía la proyección estereográfica Π desde la esfera $\mathbb{S}^2$ a $\widehat{\mathbb{C}}$, se obtiene la métrica riemanniana, conforme con la métrica euclídea, y dada por la densidad

$$ds = \frac{2}{1+|z|^2}\,|dz|\,.$$

($E \equiv G \equiv \big(4/(1+|z|^2)^2$ y $F \equiv 0$ en la notación clásica.) La **distancia esférica** $s(z,w)$ entre dos puntos $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ es la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ calculada con ese elemento de longitud. La proyección estereográfica es una isometría desde $\mathbb{S}^2$ con su distancia geodésica sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ dotado de la distancia esférica.

Las distancias esféricas y cordales son comparables:

$$\frac{2}{\pi}\,s(z,w) \le c(z,w) \le s(z,w)\,, \quad \text{para todo } z, w \in \widehat{\mathbb{C}}\,,$$

de hecho,

$$c(z,w) = 2\,\mathrm{sen}(s(z,w)/2) \quad \text{y} \quad s(z,w) = 2\,\mathrm{arc\,sen}(c(z,w)/2)\,, \quad \text{para todo } z, w \in \widehat{\mathbb{C}}\,.$$

Además,

$$\lim_{w\to z} \frac{c(z,w)}{s(z,w)} = 1\,, \quad \text{para todo } z \in \widehat{\mathbb{C}}\,.$$

En compactos de $\mathbb{C}$, las distancias cordal y euclídea son comparables. De hecho, si $R > 0$, entonces

$$\Big(\frac{2}{1+R^2}\Big)\,|z-w| \le c(z,w) \le 2|z-w|\,, \quad \text{para todo } z, w \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,R))\,. \tag{5.1}$$

Transformaciones de Möbius y $\widehat{\mathbb{C}}$. Conviene dejar apuntado que toda transformación de Möbius es un homeomorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ sobre sí mismo.

Las **isometrías** de $\widehat{\mathbb{C}}$ (dotado de la distancia cordal o de la distancia esférica) que además conservan orientación son las transformaciones de Möbius de la siguiente forma especial:

$$T(z) = \frac{\alpha z - \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}\,, \quad \text{para todo } z \in \widehat{\mathbb{C}}\,,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Entre estas isometrías están los giros (planos), $T(z) = e^{\imath\vartheta} z$, alrededor de $z = 0$ y la inversión, $T(z) = 1/z$ (que corresponde a $\alpha = 0$ y $\beta = \imath$). Las isometrías de la distancia esférica son justamente las rotaciones de $\mathbb{S}^2$ que conservan orientación (el grupo ortogonal $SO(3)$).

Al grupo de las isometrías T de $\widehat{\mathbb{C}}$ con distancia cordal o esférica (y que conservan orientación) lo denotamos por $\mathcal{I}so(\widehat{\mathbb{C}})$.

Para la distancia esférica tenemos la siguiente fórmula explícita:

$$(\star) \quad s(z,w) = 2\arctan\left(\left|\frac{z-w}{1+z\overline{w}}\right|\right), \quad \text{si } z,w \in \widehat{\mathbb{C}}\,.$$

En particular,

$$(\dagger) \quad s(0,z) = 2\arctan|z| \quad \text{y} \quad s(z,\infty_{\mathbb{C}}) = 2\arctan(1/|z|)\,, \quad \text{si } z \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

La expresión de $s(0,z)$ en $(\dagger)$ se obtiene directamente de que las rectas por el origen son geodésicas en la métrica esférica de $\widehat{\mathbb{C}}$, pues son imágenes mediante la proyección estereográfica Π de grandes círculos, meridianos, de hecho, de manera que

$$s(0,z) = \int_0^{|z|} 2\,\frac{1}{1+t^2}dt = 2\arctan|z|\,.$$

La expresión de $s(z,\infty_{\mathbb{C}})$ en $(\dagger)$ se obtiene análogamente

$$s(z,\infty_{\mathbb{C}}) = \int_{|z|}^{+\infty} 2\,\frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{1/|z|} \frac{1}{1+t^2}dt = 2\arctan(1/|z|)\,,$$

donde se ha hecho el cambio de variables $t \longmapsto 1/t$.

☞ **Nota** 5.6.2. ☜ Observe, lector, que para $r \in (0,+\infty)$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \int_0^{r} \frac{1}{1+t^2}dt + \int_r^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(r) + \int_0^{1/r} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(r) + \arctan(1/r)\,.\end{aligned}$$

De manera que

$$\pi = 2\arctan(r) + \arctan(1/r)\,, \quad \text{para todo } r \in (0,+\infty)\,.$$

♠

Podemos obtener la fórmula $(\star)$ utilizando las isometrías de $\widehat{\mathbb{C}}$ como sigue. Si $z_0, w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, tomemos $T \in \mathcal{I}so(\widehat{\mathbb{C}})$ que lleve z_0 en 0. Basta para ello con que $\alpha z_0 = \overline{\beta}$. Observe, lector, que en ese caso

$$|T(w_0)| = \left|\frac{z_0-w_0}{1+z_0\overline{w_0}}\right|.$$

Por tanto,

$$s(z_0,w_0) = s(0,T(w_0)) = 2\arctan|T(w_0)| = 2\arctan\left|\frac{z_0-w_0}{1+z_0\overline{w_0}}\right|.$$

Derivada esférica de una función meromorfa

Sea f una función meromorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$.

La **derivada esférica** $f^\sharp$ de f se define como

$$f^\sharp(z) = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega\,.$$

(Hay quien prefiere[10] no poner el valor absoluto en la derivada usual que aparece en el numerador.)

En realidad, esta expresión define la derivada esférica si $z \in \Omega$ no es un polo de f. Si $z \in \Omega$ es un polo podemos definir $f^\sharp(z)$ como

$$f^\sharp(z) = \lim_{w\to z} f^\sharp(w).$$

Observe, lector, que si z_0 es un polo de orden 1, entonces $f^\sharp(z_0) = 2/|\operatorname{Residuo}(f, z_0)|$, mientras que si z_0 es un polo de orden al menos 2, entonces $f^\sharp(z_0) = 0$.

Conviene remarcar que para cualquier función meromorfa f en Ω se tiene que $f^\sharp(z) < +\infty$, para todo $z \in \Omega$, sea z un polo de f o no.

Usaremos repetidamente que la función (real)

$$z \in \Omega \longmapsto f^\sharp(z) \in [0, +\infty)\,,$$

es continua de Ω en $[0, +\infty)$; y también que para una función f meromorfa en un dominio se tiene que $f^\sharp \equiv 0$ si y sólo si f es una constante.

Note, lector, que

$$f^\sharp(z) = \lim_{w\to z} \frac{c(f(z), f(w))}{|z-w|} = \lim_{w\to z} \frac{s(f(z), f(w))}{|z-w|}\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega\,.$$

Esta expresión es válida incluso cuando z es un polo de f, y como no distingue casos, es, como definición de la derivada esférica $f^\sharp$, un poco más elegante que la dada más arriba. Así que $f^\sharp(z)$ mide la distorsión de distancia euclídea a distancia esférica que f produce (infinitesimalmente) cerca de z.

Si $T \in \mathcal{I}so(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces $T \circ f$ es meromorfa en Ω y

$$(T \circ f)^\sharp \equiv f^\sharp\,.$$

La inversión $T(z) = 1/z$ lleva $\infty_{\mathbb{C}}$ en 0. Si z_0 es un polo de f, entonces z_0 es un cero de $1/f$ y

$$f^\sharp(z_0) = (1/f)^\sharp(z_0) = 2|(1/f)'(z_0)|\,.$$

Hacemos notar que si para una función meromorfa f en un disco $\mathbb{D}(a, r)$ se tiene que

$$M := \sup_{z\in\Omega} f^\sharp(z) < +\infty\,,$$

entonces

$$s(f(z), f(w)) \le M|z-w|\,, \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{D}(a, r).$$

Nos restringimos en este comentario a un disco por su convexidad.

[10] Hay gente pá tó, ya se sabe.

5.6.2. Los espacios $\mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$ y $\mathcal{M}(\Omega)$

Denotemos por $\mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$ al conjunto de las funciones continuas de Ω en $\widehat{\mathbb{C}}$. Observe, lector, que $\mathcal{M}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$. Por cierto, la función constante $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$ es un elemento de $\mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$.

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$ y sea $f \in \mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$. Decimos que f_n **$\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia f** si para cada compacto $K \subset \Omega$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{z\in K} c(f_n(z), f(z)) = 0\,.$$

O, equivalentemente, que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{z\in K} s(f_n(z), f(z)) = 0\,.$$

Hemos supuesto de partida en esta definición que $f \in \mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$, pero si una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos a una función $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$, entonces esa función límite f es necesariamente continua.

Hemos calificado a esta convergencia de $\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia, en la que usamos la distancias de $\widehat{\mathbb{C}}$ (cordal o esférica), para distinguirla de la convergencia usual de funciones con valores en $\mathbb{C}$ en la que usamos la distancia euclídea. Hablamos de $\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia, $\widehat{\mathbb{C}}$-equicontinuidad, $\widehat{\mathbb{C}}$-uniforme, etc; semánticamente pesado y gramaticalmente abusivo, pero, ¡qué se le va a hacer!, preciso.

Recuerde, lector, que el teorema de Ascoli–Arzelà para familias en $\mathcal{C}(\Omega)$ se extiende, mutatis mutandis casi verbatim, a familias en $\mathcal{C}(X, Y)$, donde X es un espacio métrico *separable* e Y es un espacio métrico arbitrario: teorema 5.12. Y que, además, si el espacio Y es compacto, del enunciado del teorema desaparecen, por innecesarias, las condiciones de acotación puntual o de acotación uniforme sobre compactos de la familia: teorema 5.13.

El **teorema de Ascoli–Arzelà para familias** $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$, habida cuenta de la compacidad del espacio métrico $\widehat{\mathbb{C}}$, dotado de la distancia esférica, reza entonces así:

La familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$ es relativamente compacta para la $\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia uniforme sobre compactos si y sólo si la familia $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-equicontinua sobre compactos.

La $\widehat{\mathbb{C}}$-equicontinuidad sobre compactos de $\mathcal{F}$ significa que para cada compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$c(f(z), f(w)) \leq \varepsilon\,, \quad \text{si } z, w \in K \text{ y } |z - w| \leq \delta.$$

Como de costumbre, la $\widehat{\mathbb{C}}$-equicontinuidad sobre compactos de Ω equivale a la $\widehat{\mathbb{C}}$-equicontinuidad sobre discos contenidos en Ω.

$\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia de funciones meromorfas

El teorema de 5.14 de Weierstrass sobre convergencia uniforme de funciones holomorfas tiene un análogo para $\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia uniforme sobre compactos de funciones meromorfas.

Teorema 5.41 (Convergencia de Weierstrass para funciones meromorfas) *Sea $(f_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de funciones meromorfas en Ω que $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos a $f \in \mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$.*

Entonces la función límite f es meromorfa en todo Ω, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, o es $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$.

En otras palabras, la familia que consta de las funciones meromorfas en Ω además de las constantes de $\widehat{\mathbb{C}}$ es una familia *cerrada* en $\mathcal{C}(\Omega, \widehat{\mathbb{C}})$. Por supuesto, basta con añadir a $\mathcal{M}(\Omega)$ la constante $\infty_{\mathbb{C}}$ para tener una familia cerrada, pero queda más simétrico de esta manera y más en consonancia con los teoremas de herencia. Además le quita hierro a ese papel de que el límite pueda ser ∞: es una función constante más.

demostración. Sea $z_0 \in \Omega$. Distinguimos dos casos, según $f(z_0)$ sea o no $\infty_{\mathbb{C}}$.

a) Supongamos que $f(z_0) \neq \infty_{\mathbb{C}}$. Vamos a comprobar que en un disco alrededor de z_0 las funciones f_n, de un N en adelante, son holomorfas y que convergen uniformemente sobre compactos (en el sentido euclídeo) a f. Por el teorema 5.14 de Weierstrass de convergencia holomorfa, el límite f será holomorfo en ese disco.

Por continuidad, tenemos un disco $\mathbb{D}(z_0, r)$, con $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$, donde $|f|$ está acotada digamos por R, así que

$$f(\mathbb{D}(z_0, r)) \subset \mathbb{D}(0, R)\,.$$

Tomemos un poco de margen. Sea $\eta = c(R, \infty_{\mathbb{C}})/2$, que es la mitad de la distancia entre $\infty_{\mathbb{C}}$ y el disco $\mathbb{D}(0, R)$, y sea $S > R$ tal que $c(S, \infty_{\mathbb{C}}) = c(R, \infty_{\mathbb{C}})/2$.

Por $\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia uniforme sobre compactos tenemos que hay un N tal que

$$c(f_n(z), f(z)) \leq \eta\,, \quad \text{si } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r)) \text{ y si } n \geq N\,.$$

Por tanto,

$$c(f_n(z), \infty_{\mathbb{C}}) \geq c(S, +\infty)\,, \quad \text{si } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r)) \text{ y si } n \geq N\,,$$

y

$$|f_n(z)| \leq S\,, \quad \text{si } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r)) \text{ y si } n \geq N\,.$$

Esto, en particular, nos dice que para cada $n \geq N$ la función f_n es holomorfa en el disco $\mathbb{D}(z_0, r)$.

Por la comparación (5.1) en el disco $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0, S))$ se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \Big(\frac{1+S^2}{2}\Big)\, c(f_n(z), f(z))\,, \quad \text{si } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(z_0, r)) \text{ y si } n \geq N\,.$$

Por consiguiente, la $\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia de las f_n hacia f implica la convergencia usual $f_n \overset{\mathbb{D}(0,r)}{\Longrightarrow} f$, y el teorema 5.14 de Weierstrass nos dice que f es holomorfa en el disco $\mathbb{D}(z_0, r)$.

b) Supongamos que $f(z_0) = \infty_{\mathbb{C}}$. En este caso vamos a comprobar que f tiene un polo en z_0 o que f es idénticamente $\infty_{\mathbb{C}}$ en un entorno de z_0.

Aplicando la inversión $T(z) = 1/z$, que es una isometría para la métrica esférica, se tiene que la sucesión $(1/f_n)_{n\geq 1}$ $\widehat{\mathbb{C}}$-converge a $1/f$. Nótese que $(1/f)(z_0) = 0$. El caso a) anterior nos da que $1/f$ es holomorfa en un disco $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Caben ahora dos posibilidades: o bien $1/f \equiv 0$ en $\mathbb{D}(z_0, r)$, y, por tanto, $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{D}(z_0, r)$, o bien $1/f$ tiene un cero (aislado, claro), en z_0 y, por tanto, la función f tendría un polo en z_0.

Con estos apartados, a) y b), hemos completado la descripción de los posibles comportamientos (en $\mathbb{D}(z_0, r)$) *locales* alternativos de la función límite f: la función f en $\mathbb{D}(z_0, r)$ es, o bien meromorfa en $\mathbb{D}(z_0, r)$, o bien $\equiv \infty_{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{D}(z_0, r)$.

Completamos (con meticulosidad) ahora la demostración de que f es o bien meromorfa en todo Ω o bien $\equiv \infty_{\mathbb{C}}$ en todo Ω, partiendo de la información local anterior. Querríamos apelar al principio de ceros aislados para que la posibilidad de ser $\infty_{\mathbb{C}}$ localmente se transforme en serlo globalmente. Necesitaríamos haber constatado ya que $1/f$ es meromorfa para poder invocar ese principio. Lo que sigue es el regate pertinente para alcanzar la conclusión.

Sea $E = \{z \in \Omega : f(z) = +\infty_{\mathbb{C}}\}$. Como f es continua de Ω en $\widehat{\mathbb{C}}$, el conjunto E es un cerrado de Ω. Si E es un conjunto vacío, la parte a) nos dice ya que f es holomorfa en Ω, y habríamos terminado. Si $E = \Omega$, entonces $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$, y también habríamos terminado.

Supongamos que $\emptyset \neq E \subsetneq \Omega$. La parte a) nos dice que f es holomorfa en el abierto $\Omega \setminus E$.

La función f no puede ser idénticamente nula en un disco contenido en $\Omega \setminus E$, porque entonces, por el principio de ceros aislados, lo sería en una componente conexa de $\Omega \setminus E$, cuya frontera intersecaría E, contradiciendo que f es continua de Ω en $\widehat{\mathbb{C}}$

Consideremos la función $g \equiv 1/f$.

Esta función g es meromorfa en $\Omega \setminus E$, pues f no es idénticamente nula en ninguna componente suya. Por otro lado, si $z_0 \in E$, la parte b) nos dice que en un disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ la función f o tiene un polo en z_0 o es idénticamente $\infty_{\mathbb{C}}$. De manera que g es holomorfa en $\mathbb{D}(z_0, r)$ o bien $g \equiv 0$ en ese disco; en cualquier caso g sería holomorfa en $\mathbb{D}(z_0, r)$.

En conclusión, g es meromorfa en Ω. Pero entonces, si fuera $g \equiv 0$, se tendría que $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$ y si fuera $g \not\equiv 0$, entonces f sería meromorfa en Ω. ■

Como complemento al teorema 5.41 de convergencia, para las derivadas esféricas tenemos:

Lema 5.42 (Lema de Marty) *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{M}(\Omega)$.*

a) *Si* $(f_n)_{n\geq 1}$ $\widehat{\mathbb{C}}$*-converge uniformemente sobre compactos hacia* $f \in \mathcal{M}(\Omega)$*, entonces* $(f_n^\sharp)_{n\geq 1}$ *converge uniformemente sobre compactos a* $f^\sharp$.

b) *Si* $(f_n)_{n\geq 1}$ $\widehat{\mathbb{C}}$*-converge uniformemente sobre compactos hacia* $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$*, entonces* $(f_n^\sharp)_{n\geq 1}$ *converge uniformemente sobre compactos a* 0.

Note, lector, que las funciones $f_n^\sharp$ y la $f^\sharp$ son funciones *reales* (de hecho nonegativas).

demostración. a) Verificaremos que esas derivadas esféricas convergen localmente uniformemente hacia $f^\sharp$.

Sea $a \in \mathbb{D}$. Distinguimos dos casos, según a sea polo o no de f. Si a no es polo de f, entonces, como hemos visto en la prueba del teorema 5.41, existe un radio $r > 0$ y un entero N tal que para $n \geq N$ la función f_n es holomorfa en $\mathbb{D}(a, r)$ y además, las f_n tienden a f uniformemente (en el sentido euclídeo) a f en el disco $\mathbb{D}(a, r)$.

Por el teorema 5.14 de convergencia de Weierstrass para funciones holomorfas, tenemos que

$$\begin{aligned}(f_n)_{n\geq N} &\text{ tiende uniformente a } f \text{ en } \mathbb{D}(a,r),\\ (f_n')_{n\geq N} &\text{ tiende uniformente a } f' \text{ en } \mathbb{D}(a,r),\end{aligned}$$

de donde se deduce de inmediato que $f_n^\sharp$ tiende a $f^\sharp$ uniformemente en $\mathbb{D}(a, r)$.

Supongamos ahora que a es polo de f. Podemos suponer que las f_n no son idénticamente nulas de un N en adelante, porque si hubiera infinitas $f_n \equiv 0$, entonces f sería idénticamente nula. Este comentario nos permite considerar para $n \geq N$ las funciones meromorfas $g_n = 1/f_n$ y además la $g = 1/f$. Como la inversión $z \mapsto 1/z$ es una isometría de $\widehat{\mathbb{C}}$, las g_n $\widehat{\mathbb{C}}$-convergen uniformemente sobre compactos a la g. Como $g(a) = 0$, el caso anterior nos dice que para un cierto r se tiene que $g_n^\sharp$ converge uniformemente hacia $g^\sharp$ en $\mathbb{D}(a, r)$. Y como $f_n^\sharp \equiv g_n^\sharp$ y $f^\sharp \equiv g^\sharp$, se concluye también en este caso, que $f_n^\sharp$ converge uniformemente hacia $f^\sharp$ en $\mathbb{D}(a, r)$.

b) Las f_n no son idénticamente nulas de un N en adelante, así que podemos suponer, y suponemos, que ninguna de las f_n es idénticamente nula. Consideramos las funciones meromorfas $g_n = 1/f_n$, que $\widehat{\mathbb{C}}$-convergen uniformemente sobre compactos a la función nula $g \equiv 0$. Por la parte a), se tiene que

$$f_n^\sharp \equiv g_n^\sharp \quad \text{converge uniformente sobre compactos hacia} \quad g^\sharp \equiv 0\,.$$

■

$\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia para funciones holomorfas. Para funciones holomorfas podemos considerar dos nociones de convergencia uniforme sobre compactos: la $\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia y la convergencia usual. Conviene que las comparemos.

En primer lugar, si una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos a $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces por la comparación entre distancia cordal y distancia euclídea de la ecuación (5.1) tenemos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ $\widehat{\mathbb{C}}$-converge hacia f.

Ahora, en la otra dirección. Supongamos que tenemos una sucesión de funciones *holomorfas* (sin polos) en un dominio Ω que $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos a una función f. El teorema 5.41 nos dice que f es meromorfa o $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$. Pero, en el primer caso, ¿puede el límite f tener polos? Pues no.

Veamos. Supongamos que la función límite f es meromorfa y que tiene un polo en un punto $z_0 \in \Omega$. Para cada $n \geq 1$, sea $g_n = 1/f_n$ y sea $g = 1/f$. La función meromorfa g tiene un cero en z_0. Como las g_n $\widehat{\mathbb{C}}$-convergen uniformemente sobre compactos a g, la discusión del teorema 5.41 nos dice que en un disco $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$ las g_n son holomorfas y convergen uniformemente sobre compactos (en sentido usual) a g. Las g_n no se anulan en $\mathbb{D}(z_0, r)$, pues las f_n no tienen polos. El teorema 5.25 de herencia de Hurwitz nos dice entonces que, o bien g no se anula (que no es el caso), o bien $g \equiv 0$ (que no es el caso).

En resumen,

Lema 5.43 *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio Ω.*

a) *Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre compactos hacia f, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos.*

b) *Si $(f_n)_{n\geq 1}$ $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos hacia f, entonces o bien $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$ o bien $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre compactos.*

Así que, excepto por ese papel de la función constante $\infty_{\mathbb{C}}$, las dos nociones de convergencia son, para funciones holomorfas, equivalentes.

5.6.3. $\widehat{\mathbb{C}}$-normalidad

Decimos que la familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ es **$\widehat{\mathbb{C}}$-normal** si es relativamente compacta en la $\widehat{\mathbb{C}}$-convergencia uniforme sobre compactos, es decir, si de cualquier sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ de elementos de $\mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión que $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos de Ω.

El teorema 5.41 de Weierstrass nos dice que cualquiera que sea el límite de una tal (sub-)sucesión la función límite f es, o bien meromorfa en todo Ω, o bien idénticamente $\infty_{\mathbb{C}}$.

El teorema de Ascoli–Arzelà aplicado a una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ de funciones meromorfas en Ω nos dice que la familia $\mathcal{F}$ es relativamente compacta si y sólo si la familia $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-equicontinua sobre compactos; le recordamos, lector, que el que no haya condición sobre acotación puntual o uniforme sobre compactos en el teorema de Ascoli–Arzelà se debe a la compacidad de $\widehat{\mathbb{C}}$, repase si le parece el (comienzo del) apartado 5.6.2, así como el teorema 5.13.

En lo que sigue vamos a ver dos caracterizaciones (criterios) bien útiles de $\widehat{\mathbb{C}}$-normalidad, a saber, el criterio de Marty, teorema 5.44, y el lema 5.48 de Zalcman.

5.6.4. Criterio de Marty

El siguiente teorema de Frédéric Marty[11] expresa la $\widehat{\mathbb{C}}$-normalidad en términos de la acotación uniforme local de las derivadas esféricas.

Teorema 5.44 (Teorema de Marty) *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas en un dominio Ω. La familia $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal si y sólo si*

$$(\star) \quad \sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{z\in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))} f^\sharp(z) < +\infty\,, \quad \textit{para cualquier disco cerrado } \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \subset \Omega\,.$$

La condición $(\star)$ significa que las derivadas esféricas de los miembros de $\mathcal{F}$ están uniformemente acotadas sobre compactos, o, equivalentemente, que la familia $\mathcal{F}^\sharp$ de derivadas esféricas de los elementos de $\mathcal{F}$ está localmente uniformemente acotada.

demostración. Supongamos que se cumple $(\star)$. Fijemos $a \in \Omega$ y $r > 0$ tales que $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \subset \Omega$ y sea

$$M := \sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{z\in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))} f^\sharp(z)\,.$$

Entonces

$$s(f(z), f(w)) \le M\,|z-w|\,, \quad \text{si } z,w \in \mathbb{D}(a,r) \text{ y si } f \in \mathcal{F}\,,$$

que da la $\widehat{\mathbb{C}}$-equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$ en el disco $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))$. Es decir, la familia $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-localmente equicontinua y, por tanto, $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.

En la otra dirección, supongamos que $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal. Fijemos $a \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \subset \Omega$. Comprobemos $(\star)$. Supongamos que no, es decir, que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{z\in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))} f^\sharp(z) = +\infty\,.$$

Entonces existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n\ge 1}$ de $\mathcal{F}$ y una sucesión de puntos $(z_n)_{n\ge1}$ de $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^\sharp(z_n) = +\infty\,.$$

Como $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal y como $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))$ es compacto, podemos suponer que $(f_n)_{n\ge1}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-convergente hacia una cierta f y que $(z_n)_{n\ge1}$ converge a un cierto punto $w \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))$. El límite f es, o bien una función meromorfa en Ω, o bien $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$.

Si f es meromorfa en Ω, el lema 5.42 de Marty nos dice que $(f_n^\sharp)_{n\ge1}$ converge uniformemente sobre compactos hacia $f^\sharp$, de manera que

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} f_n^\sharp(z_n) = f^\sharp(w)\,,$$

[11]Este teorema aparece en el primer capítulo de la tesis doctoral, [32], que Frédéric Marty (1911-1940) realizó bajo la dirección de no otro que Paul Montel y que fue publicada en 1931. Marty fue uno de los miembros habituales de aquel seminario de jóvenes matemáticos franceses que devino en el grupo Bourbaki. Marty, oficial de aviación, murió en acto de guerra en 1940. Su padre, Joseph Marty, también matemático, había muerto en acto de guerra en 1914.

lo que no puede ser y además es imposible porque la derivada esférica de cualquier función meromorfa en cualquier punto es finita.

Si $f \equiv \infty_{\mathbb{C}}$, una nueva invocación al lema 5.42 de Marty, pero ahora a su parte b), daría

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} f_n^\sharp(z_n) = 0\,,$$

de nuevo, contradicción. Por consiguiente,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{z\in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))} f^\sharp(z) < +\infty\,.$$

En suma, la condición $(\star)$ se cumple para todo los discos $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \subset \Omega$. ■

Se sigue del teorema, 5.44, de Marty que, como recogemos en el corolario siguiente, la $\widehat{\mathbb{C}}$-normalidad es una propiedad local:

Corolario 5.45 *Sea $\mathcal{F}$ una familia en $\mathcal{M}(\Omega)$. La familia $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal en el dominio Ω si y sólo si para todo $a \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r)) \subset \Omega$ y tal que $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal en $\mathbb{D}(a,r)$.*

Teorema de Montel–Carathéodory

Sin más:

Teorema 5.46 (Montel–Carathéodory) *La familia $\mathcal{F}$ de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que omiten $\{0,1\}$ es una familia $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.*

Este teorema se conoce también como teorema de Montel a secas. Nos viene bien este doble epónimo para diferenciarlo del teorema 5.32 de Montel, caracterizando normalidad.

DEMOSTRACIÓN. Revise lector, ante de seguir y si lo tiene a bien, el ejemplo 5.5.5, sobre normalidad y el teorema de Schottky, que invocaremos a continuación.

Sea (f_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{F}$. Buscamos una subsucesión $\widehat{\mathbb{C}}$-convergente. Nos fijamos en la sucesión $f_n(0)$.

a) Si $\liminf_{n\to\infty} |f_n(0)| > 0$ y $\limsup_{n\to\infty} |f_n(0)| < +\infty$, entonces para un Δ tenemos que la colección $\{f_n : n \geq 1\}$ está contenida en la familia normal $\mathcal{K}_\Delta$, y por tanto una subsucesión (f_{n_k}) converge uniformemente sobre compactos a una cierta f holomorfa en $\mathbb{D}$. El lema 5.43 de comparación de convergencias nos da que (f_{n_k}) $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos hacia f.

b) Si $\liminf_{n\to\infty} |f_n(0)| = 0$, entonces hay una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(0)| = 0$. Consideremos la sucesión de funciones $g_k \equiv 1 - f_{n_k}$, para $k \geq 1$. Estas g_k siguen siendo de $\mathcal{F}$, pues omiten $\{0,1\}$; el apartado a) nos dice que admiten una subsucesión, que seguimos denotando por $(g_k)_{k\geq 1}$, que converge uniformemente sobre compactos a, digamos, g holomorfa en $\mathbb{D}$. Como $g(0) = 1$, el teorema 5.27 de herencia de Hurwitz nos dice que $g \equiv 1$. Las correspondientes f_n

convergen uniformemente sobre compactos a 0 y rematamos el argumento en este caso b) como en el caso a).

c) Si $\limsup_{n\to\infty} |f_n(0)| = +\infty$, entonces hay una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(0)| = +\infty$. Consideremos la sucesión de funciones $g_k \equiv 1/f_{n_k}$, para $k \geq 1$. Estas g_k siguen siendo de $\mathcal{F}$, pues omiten $\{0,1\}$ y son holomorfas, puesto que las f_n no se anulan; el apartado b) nos dice que estas g_k admiten una subsucesión, que seguimos denotando por $(g_k)_{k\geq 1}$, que converge uniformemente sobre compactos a, digamos, g holomorfa en $\mathbb{D}$. Como $g(0) = 0$, el teorema 5.27 de herencia de Hurwitz nos dice que $g \equiv 0$. Como en el caso a), estas g_k $\widehat{\mathbb{C}}$-convergen uniformemente hacia 0. Finalmente, como la inversión $z \mapsto 1/z$ es una $\widehat{\mathbb{C}}$-isometría, concluimos que las correspondientes f_n $\widehat{\mathbb{C}}$-convergen uniformemente hacia $\infty_{\mathbb{C}}$. ■

Ejemplo 5.6.1 *Demostración del teorema de Picard como consecuencia del teorema de Montel–Carathéodory.*

Compare lector, por favor, el presente ejemplo, con el ejemplo 5.5.2.

Sea f una función entera que omite $\{0,1\}$. Vamos a demostrar que $f'(a) = 0$, para cualquier $a \in \mathbb{C}$.

Denotemos con $\mathcal{F}$ a la familia de funciones holomorfas en el disco unidad y que omiten $\{0,1\}$.

Fijemos $a \in \mathbb{C}$ y para cada entero $n \geq 1$, sea g_n la función

$$g_n(z) = f(a + nz)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Las funciones g_n pertenecen todas a la familia $\mathcal{F}$. Por el teorema de Montel–Carathéodory existe una sucesión n_k tal que $(g_{n_k})_{k\geq 1}$ converge uniformemente sobre compactos hacia g holomorfa en $\mathbb{D}$ o hacia $\infty_{\mathbb{C}}$. Esta segunda opción es imposible, pues $g_{n_k}(0) = f(a) \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

Por tanto

$$n_k\, f'(a) = g'_{n_k}(0) \to g'(0) \in \mathbb{C}$$

y, por tanto, $f'(a) = 0$.

No está de más señalar que el teorema de Montel–Carathéodory, tal y como lo hemos presentado, es consecuencia del teorema de Schottky, así que la demostración del teorema de Picard de este ejemplo depende asimismo en última instancia del teorema de Schottky. ♣

Corolario 5.47 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y sean a, b, c tres valores distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. La familia $\mathcal{F}$ de las funciones meromorfas en Ω que omiten $\{a, b, c\}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.*

Respecto del teorema 5.46, en este corolario se ha reemplazado el disco unidad $\mathbb{D}$ por un dominio general y los valores omitidos $\{0, 1, \infty_{\mathbb{C}}\}$ por tres valores $\{a, b, c\}$; así que el corolario es una versión más general del teorema. Notemos, en cualquier caso, que una transformación de Möbius lleva tres valores dados en $\{0, 1, \infty_{\mathbb{C}}\}$, y que una familia es normal si y sólo si lo es para cualquier disco $\mathbb{D}(a, r)$ contenido en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Mediante una transformación de Möbius, si falta hiciera, podemos suponer que esos tres valores son $\{0, 1, \infty_{\mathbb{C}}\}$. (Recuerde lector en este punto que las transformaciones de Möbius son homeomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismo.) En ese caso, los miembros de la familia $\mathcal{F}$ son funciones holomorfas, que omiten $\{0, 1\}$.

Vamos a comprobar que la familia $\mathcal{F}$ satisface el criterio de Marty.

Sea $\mathbb{D}(a, r)$ un disco tal que $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \subset \Omega$. Sea $s > r$ tal que $\mathbb{D}(a, s) \subset \Omega$. Por el teorema 5.46 de Montel–Carathéodory, con una reescalado pertinente y obvio, tenemos que la familia $\mathcal{F}$ restringida a $\mathbb{D}(a, s)$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.

Y, por tanto, por el criterio de Marty aplicado a esa familia de restricciones y a $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \subset \mathbb{D}(a, s)$, se deduce que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r))} f^\sharp(z) < +\infty \, .$$

Como esto es cierto para cualquier disco $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \subset \Omega$, el criterio de Marty, de nuevo, pero ahora en dirección contraria, nos confirma que, en efecto, la familia $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal. ■

5.6.5. Lema de Zalcman

El lema de Lawrence «Larry»Zalcman, [48], es un criterio de normalidad (que se enuncia como de no-normalidad); cosas veredes.

Lema 5.48 (Lema de Zalcman) *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas en $\mathbb{D}$.*

Si la familia $\mathcal{F}$ no es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal entonces existe

- *una sucesión de puntos $(a_n)_{n \geq 1} \subset \Omega$ que convergen a, digamos, $a \in \Omega$,*
- *una sucesión de funciones $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$,*
- *una sucesión de radios $\rho_n \to 0$,*

y una función meromorfa f en todo $\mathbb{C}$ *y no constante tal que*

$$g_n(z) := f_n(a_n + \rho_n z) \quad \widehat{\mathbb{C}}\text{-converge a } f(z) \, ,$$

y, además,

$$f^\sharp(z) \leq f^\sharp(0) = 1 \, , \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \, .$$

Y recíprocamente, si hay sucesiones de puntos $(a_n)_{n \geq 1}$, de funciones $(f_n)_{n \geq 1}$ y de radios $(\rho_n)_{n \geq 1}$ y función límite f que cumplen lo que acabamos de especificar, entonces la familia $\mathcal{F}$ no es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.

Nos hemos permitido, lector, un ligero abuso terminológico en el enunciado anterior. Para cada $n \geq 1$, la función $g_n(z) := f_n(a_n + \rho_n z)$ está definida si $|z| < R_n := \mathrm{dist}(a_n, \partial\Omega)/\rho_n$. Como $a_n \to a \in \Omega$ y $\rho_n \to 0$, se tiene que $R_n \to +\infty$. Dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$ se tiene que g_n está definida en K si $n \geq N$ para un cierto N, y se entiende, en el enunciado (y luego en la prueba, claro) que $(g_n)_{n\geq N}$ converge uniformemente hacia f en K.

Note lector que si la familia $\mathcal{F}$ consiste de funciones holomorfas entonces, como consecuencia del lema 5.43 se obtiene que la función límite f, del lema de Zalcman, es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$, es decir, una función entera.

La idea de la demostración que detallaremos a continuación es la siguiente: si la familia $\mathcal{F}$ no es normal tendremos $f_n \in \mathcal{F}$ y $a_n \in \Omega$ donde $f_n^\sharp(a_n) \to \infty$. Pero además, y ésta es la clave, de manera que $f_n^\sharp$ tenga un máximo local en a_n. Así que las $f_n(a_n + \rho_n z)$ tendrán derivada esférica con un máximo local en 0 y con valor 1, si se escoge $\rho_n \to 0$ adecuado. Como los $\rho_n \to 0$, el dominio de estas $f_n(a_n + \rho_n z)$ tiende a ser todo $\mathbb{C}$, y un argumento final de familias normales nos da la convergencia a la f del enunciado.

demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ no es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal en Ω. El criterio de Marty, y un inocuo y pertinente reescalado y traslado, si fuera preciso, nos da que podemos suponer que $\mathrm{cl}(\mathbb{D}) \subset \Omega$ y que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{z\in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))} f^\sharp(z) = +\infty \qquad \text{para un cierto } 0 < r < 1.$$

Sea $f_n \in \mathcal{F}$ y $z_n \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$ tal que $f_n^\sharp(z_n) \to +\infty$. Definimos

$$M_n := \max_{z\in \mathrm{cl}(\mathbb{D}))} (1-|z|^2) f_n^\sharp(z).$$

Para cada $n \geq 1$, la función $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \longmapsto (1-|z|^2) f_n^\sharp(z)$ es continua y se anula en $\partial\mathbb{D}$; y esto garantiza su máximo en el interior.

Para cada $n \geq 1$, tomemos $a_n \in \mathbb{D}$ tal que

$$M_n = (1-|a_n|^2)\, f_n^\sharp(a_n)\,.$$

Insistimos en que $|a_n| < 1$, pues el máximo ha de alcanzarse en un punto de $\mathbb{D}$, pues en $\partial\mathbb{D}$ la función $(1-|z|^2) f_n^\sharp(z)$ se hace 0.

Definamos $\rho_n = 1/f_n^\sharp(a_n)$, para cada $n \geq 1$. Ya tenemos todos los ingredientes.

Pasando a una subsucesión, si acaso fuera preciso, podemos suponer que a_n converge: $a_n \to a \in \mathbb{D}$.

Vamos ya con las comprobaciones.

Observe, lector, que

$$M_n \geq (1-|z_n|^2)\, f_n^\sharp(z_n) \geq (1-r^2)\, f_n^\sharp(z_n)\,,$$

de manera que

$$M_n \to \infty\,, \quad \text{cuando } n \to \infty\,.$$

Como

$$\rho_n = \frac{1}{f_n^\sharp(a_n)} = \frac{1-|a_n|^2}{M_n} \leq \frac{1}{M_n}\,,$$

tenemos que $\rho_n \to 0$, como es preceptivo; de hecho,

$$\frac{\rho_n}{1-|a_n|^2} \to 0\,, \quad \text{cuando } n \to \infty\,.$$

Definamos la función $g_n(z) = f_n(a_n + \rho_n z)$. Esta función está definida al menos en $\mathbb{D}(0, R_n)$, donde

$$R_n = \frac{1-|a_n|}{\rho_n}\,,$$

y allí es meromorfa. Nótese que $R_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Para cada $n \geq 1$, se tiene que

$$g_n^\sharp(0) = \rho_n\, f_n^\sharp(a_n) = 1\,.$$

Fijemos $R > 0$ y sea n tal que $R < R_n$. Para $z \in \mathbb{D}(0, R)$ se tiene que $z \in \mathbb{D}(0, R_n)$ y, por tanto, que $a_n + \rho z \in \text{cl}(\mathbb{D})$, de manera que

$$\begin{aligned} g_n^\sharp(z) &= \rho_n\, f_n^\sharp(a_n + \rho z_n) \leq \rho_n\, f_n^\sharp(a_n + \rho z_n) \leq \rho_n \frac{M_n}{1-|a_n+\rho_n z|^2} \\ &= \frac{1-|a_n|^2}{1-|a_n+\rho_n z|^2} \leq \frac{1-|a_n|^2}{1-(|a_n|+\rho_n R)^2} := C_n(R). \end{aligned}$$

Esta $C_n(R)$ es una cota uniforme de $g_n^\sharp$ en todo $\mathbb{D}(0, R)$. Para cada R, la sucesión $C_n(R)$ está acotada, y de hecho, tiende a 1 cuando $n \to \infty$.

Veamos. Si $a = \text{lím}_{n\to\infty} a_n$ es tal que $|a| < 1$, entonces, como $\rho_n \to 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} C_n(R) = \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2} = 1\,.$$

Si $|a| = 1$, entonces L'Hôpital, el marqués, nos da que

$$\lim_{n\to\infty} C_n(R) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-|a_n|}{1-|a_n|-\rho_n R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-R/R_n} = 1\,.$$

Nótese que, en particular,

$$(\star) \qquad \limsup_{n\to\infty}\; g_n^\sharp(z) \leq 1\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Como para cada $R > 0$, la sucesión $C_n(R)$ está acotada, concluimos por el criterio de Marty que $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es un familia $\widehat{\mathbb{C}}$-normal en todo $\mathbb{C}$.

Pasando a una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que la sucesión g_n $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente en todo $\mathbb{C}$ a, digamos f.

Como $g_n^\sharp(0) = 1$, para cada $n \geq 1$, el lema 5.42 de Marty nos da que f es meromorfa en todo $\mathbb{C}$ (es decir que $f \not\equiv \infty_{\mathbb{C}}$) y no constante, y que, de hecho,

$$f^\sharp(0) = 1\,.$$

Más aún, por ($\star$),

$$f^\sharp(z) \le 1 = f^\sharp(0)\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Vamos ahora con la *demostración del recíproco*. Supongamos que $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal y que tenemos $a_n \in \Omega$ con $a_n \to a \in \Omega$, $\rho_n \to 0$ y f_n, g_n y f como en el enunciado. Buscamos una contradicción.

Sea $0 < r < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$. Podemos suponer que $a_n \in \mathbb{D}(a, r)$ para cada $n \ge 1$.

Como la familia $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal, el criterio de Mary nos dice que

$$M := \sup_{n\ge 1} \sup_{z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D}(a,r))} f_n^\sharp(z) < +\infty\,.$$

Pero entonces

$$g_n^\sharp(0) = \rho_n f_n^\sharp(a_n) \le \rho_n M \to 0\,,$$

y, por tanto,

$$1 = f^\sharp(0) = \lim_{n\to\infty} g_n^\sharp(0) = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Prueba de Ros del teorema de Montel–Carathéodory

Este apartado está dedicado a una demostración debida a Antonio Ros[12] del teorema de Montel–Carathéodory y del teorema de Picard, basada en argumentos de familias normales.

Los ingredientes de la demostración son el criterio de Marty y el lema de Zalcman; este último, repase, lector, se dedujo de aquél.

Es una demostración astuta, ingeniosa y elegante. No se apela como en la demostración que hemos visto del teorema de Montel–Carathéodory al teorema de Schottky. Apuntamos además que el teorema de Picard se dedujo ya del de Montel–Carathéodory en el ejemplo 5.6.1 con un sencillo argumento de cambio de escala.

Las comentarios precedentes de corte metodológico pretenden señalar que los ingredientes de esta demostración de Ros del teorema de Picard son de naturaleza básica, lo que lo hace particularmente atractiva.

DEMOSTRACIÓN DE A. ROS DEL TEOREMA DE MONTEL–CARATHÉODORY. Vamos a demostrar, de hecho, la versión, ligeramente más general, que se enuncia en el corolario 5.47, del teorema de Montel–Carathéodory. Como ya vimos en la demostración de este teorema, podemos suponer que los valores omitidos por los miembros de la familia $\mathcal{F}$ son $\{0, 1, \infty_{\mathbb{C}}\}$. Bastará con que probemos que para cualquier disco $\mathbb{D}(a, r)$ con $\operatorname{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \subset \Omega$ se tiene que $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal en $\mathbb{D}(a, r)$. Esto es así, por ejemplo, por el criterio de Marty. Con una traslación y cambio de escala inocuos podemos suponer que $\mathbb{D}(a, r) = \mathbb{D}$.

Como omiten $\infty_{\mathbb{C}}$, las funciones de la familia $\mathcal{F}$ son holomorfas en Ω.

[12]Matemático murciano nacido en 1956. Catedrático de Geometría de la Universidad de Granada. Uno de los más importantes y relevantes geómetras de la historia de la matemática española.

Para cada $n \geq 0$, creamos la familia $\mathcal{F}_n$ de aquellas funciones g holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ tales que $g^n \in \mathcal{F}$. Nótese que $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}$.

Cada familia $\mathcal{F}_n$ es no vacía, pues si $f \in \mathcal{F}$, entonces f no se anula en $\mathbb{D}$ y por tanto se puede escribir $f \equiv g^n$, donde g es holomorfa en $\mathbb{D}$, y, claro está, $g \in \mathcal{F}_n$. Observe, lector, que si $g \in \mathcal{F}_n$, entonces g omite las raíces n-ésimas de la unidad

$$\{e^{2\pi\imath k/n} : 1 \leq k \leq n\}\,.$$

Si para algún $n \geq 1$ la familia $\mathcal{F}_n$ fuera $\widehat{\mathbb{C}}$-normal, entonces la familia $\mathcal{F}$ sería $\widehat{\mathbb{C}}$-normal. Veamos. Fijemos n y sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{F}$, de la que queremos ver que tiene una subsucesión que $\widehat{\mathbb{C}}$-converge uniformemente sobre compactos. Para cada $k \geq 1$, sea $g_k \in \mathcal{F}_n$ tal que $g_k^n \equiv f_k$. La sucesión $(g_k)_{k\geq 1}$ tiene una subsucesión $\widehat{\mathbb{C}}$-convergente hacia g. Para esta g caben dos posibilidades: o bien $g \equiv \infty_{\mathbb{C}}$, o bien g es, de hecho, holomorfa y la convergencia es uniforme sobre compactos en sentido usual. En el primer caso, f_k $\widehat{\mathbb{C}}$-converge a $\infty_{\mathbb{C}}$ y en el segundo a g^n.

Vamos a argumentar por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathcal{F}$ no es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal; de manera que, como acabamos de ver, ninguna de las familias $\mathcal{F}_n$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.

Para cada $n \geq 1$, apelando al lema 5.48 de Zalcman y al teorema de herencia de rango 5.27 de Hurwitz, obtenemos G_n entera tal que G_n omite las raíces n-ésimas de la unidad y, además, tal que

$$(\star) \qquad G_n^\sharp(z) \leq G_n^\sharp(0) = 1\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

El teorema de Hurwitz contempla la posibilidad de que G_n sea constante, pero como $G_n^\sharp(0) = 1$, éste caso no puede darse.

Por $(\star)$ y el criterio de Marty, la familia $\mathcal{G}$ que consiste de la sucesión de funciones enteras G_n, $n \geq 1$, es una familia $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.

Tomemos una subsucesión de estas G_n que $\widehat{\mathbb{C}}$-converja uniformemente sobre compactos y sea G su límite. Esta función G es, o bien entera, y en este caso, por el lema 5.43, la convergencia de la subsucesión es uniforme sobre compactos en el sentido usual; o bien idénticamente $\infty_{\mathbb{C}}$. En virtud del lema 5.42, esta última posibilidad no puede darse puesto que $G_n^\sharp(0) = 1$, para cada $n \geq 1$.

Así que G es entera y además $G^\sharp(0) = 1$, de manera que G no es constante.

Como cada g_n omite las raíces n-ésimas de la unidad, el teorema de herencia de rango 5.27 nos dice que G omite todo el círculo unidad. Por tanto, $G(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}$ o $G(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{D})$. El teorema de Liouville, aplicado en el primer caso a G y en el segundo a la función entera $1/G$, nos dice que G es constante, lo que supone una contradicción. Por consiguiente, la familia $\mathcal{F}$ es normal. ■

El lector se habrá percatado sin duda de cierto regate metodológico (y pedagógico) en la demostración anterior. Para cualquier $n \geq 1$ la función entera G_n omite las raíces n-ésimas de la unidad, además de 0, y por el teorema de Picard, son constantes. Y esto ya es una contradicción, pues $G_n^\sharp(0) = 1$. Pero no se ha querido utilizar el teorema de Picard para demostrar el teorema de Montel–Carathéodory, sino conquistar este último teorema armados tan sólo con la noción de normalidad y el lema de Zalcman; para luego deducir el teorema de Picard del de Montel–Carathéodory. Ésta es parte de la gracia de esta demostración.

5.6.6. Principio de Bloch

Bloch [17] dice:

Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito.

Eso es, así lo dice Bloch, y dice, bien. «No hay nada en el infinito que no haya sido antes en lo finito». Bloch parafrasea, según él mismo dice, el apotegma, tan aristotélico, de Tomás de Aquino que reza:

Nihil est in intellectu quod non prius in sensu.[13]

Puro empirismo.

Tenemos varios teoremas que nos dicen que las funciones *enteras* que gozan de determinada propiedad P han de ser constantes. Por ejemplo,

- el teorema de Liouville y la propiedad de ser acotada,
- o el teorema de Picard y la propiedad de omitir $\{0, 1\}$.

Lo que propone Bloch es que si ese es el caso, es decir, si

$$\text{(entera + propiedad } P) \ \Rightarrow \ \text{constante,}$$

entonces debe haber un teorema *finito* del que éste proviene, es decir, ha de haber un teorema para funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ que diga que si una $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tiene la tal propiedad P, entonces la derivada en $z = 0$ debe tener una cota.

Por ejemplo:

- El teorema de Liouville, inocuamente normalizado, dice que si f es entera y $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}$ entonces f constante. El lema de Schwarz es una tal contrapartida finita. Pues si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ cumple $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, entonces $|f'(0)| \leq 1$. (Recuerde el lector que no hace falta suponer $f(0) = 0$.) Si f es entera y aplicamos el lema de Schwarz a la función $z \in \mathbb{D} \mapsto f(a+Rz)$, para $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$, se deduce que

$$|f'(a)| \leq 1/R\,;$$

  como esto es cierto para todo $a \in \mathbb{C}$ y todo $R > 0$, se concluye que f es constante.

- El teorema de Picard tiene esa versión finita de Landau: teorema 4.43, del que con el mismo argumento que acabamos de ver, se deduce el teorema de Picard.

[13] Nada surge en nuestro intelecto que antes no haya sido percibido por los sentidos; es decir, de lo empírico al modelo abstracto, mental,... matemático.

El propio teorema 4.33 de Bloch (para funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$) surgió (en la mente de Bloch) como versión finita del siguiente teorema sobre funciones enteras.

Teorema 5.49 (Teorema de Valiron) *Sea f entera, no constante. Entonces, para todo $R > 0$ existe un disco $\mathbb{D}(a, R)$ que f cubre biholomorfamente.*

O, contrarrecíprocamente, si f es entera y para un cierto $R_0 < +\infty$ la función entera f no cubre ningún disco de radio R_0 biholomorfamente, entonces f es constante.

Veamos la DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE VALIRON, en su versión contrarrecíproca, como corolario del teorema de Bloch siguiendo la pauta de cómo se deduce el teorema de Liouville a partir del lema de Schwarz, o el teorema de Picard a partir de la versión finita de Landau.

Sea f entera y R_0 como en el enunciado contrarrecíproco. Queremos ver que f es constante. Fijemos $b \in \mathbb{C}$ y consideremos la función holomorfa $g(z) = f(b + z)$ para $z \in \mathbb{D}$. Por el teorema 4.33 de Bloch biholomorfo, la función g cubre biholomorfamente un disco de radio $|g'(0)|/6 = |f'(b)|/6$. De manera que $|f'(b)| \leq 6R_0$. Como esto es cierto para todo $b \in \mathbb{C}$, el teorema de Liouville nos dice que f' es constante, y por tanto que para ciertos α y β se tiene que $f(z) = \alpha z + \beta$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Si $\alpha \neq 0$, entonces f es biholomorfa de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, lo que es contrario a hipótesis. Así que $\alpha = 0$ y f es la función constante β. ■

En la misma línea, o mejor, en paralelo, se entiende que Bloch está proponiendo asimismo que estos teoremas «si f entera satisface la propiedad P, entonces f constante" deben tener una contrapartida en familias normales en $\mathbb{D}$, a saber, que la familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que cumplen esa tal propiedad P ha de ser normal. Al teorema de Liouville, normalizado como antes, le correspondería el teorema de que la familia de $\mathcal{F}$ de funciones de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ con valores en $\mathbb{D}$ es normal, como es el caso. Y al teorema de Picard, donde la propiedad P es la de omitir $\{0, 1\}$, le correspondería el teorema de Montel–Carathéodory, donde de rondón, se cuela la $\widehat{\mathbb{C}}$-normalidad para así abarcar el posible límite $\infty_{\mathbb{C}}$.

El lema de Zalcman fue ideado por Zalcman precisamente para trasladar este principio heurístico, esta guía metodológica, y formalizarlo en un teorema-teorema.

Es conveniente en lo que sigue indicar junto a la función el dominio al que nos referimos; así, (f, Ω) se refiere a la función meromorfa f en el dominio Ω.

Decimos que $(f, \Omega) \in P$ si la función f meromorfa en Ω cumple (en Ω) la propiedad P. Por ejemplo, si P es la propiedad de estar acotada, y si $f(z) = 1/(1 - z)$ entonces $(f, \mathbb{D}(0, r)) \in P$, si $r < 1$, pero $(f, \mathbb{D}) \notin P$.

Decimos que P es una **propiedad de Zalcman** si cumple las siguientes tres requisitos naturales:

[1.- RESTRICCIÓN] Si $(f, \Omega) \in P$, entonces $(f, \Omega') \in P$, para cualquier $\Omega' \subset \Omega$.

[2.- Normalización] Si $(f, \Omega) \in P$, y si $\phi(z) = az + b$, con $a \neq 0$, entonces

$$(f \circ \phi, \phi^{-1}(\Omega)) \in P\,.$$

[3.- Convergencia monótona] Si $(f_n, \Omega_n) \in P$ para cada $n \geq 1$ son tales que

- los dominios Ω_n son crecientes, es decir, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$,
- y las f_n $\widehat{\mathbb{C}}$-convergen uniformemente sobre compactos a f,

entonces $(f, \mathbb{C}) \in P$.

La propiedad P dada por $(f, \Omega) \in P$ si $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$ cumple los tres requisitos, pero la propiedad de ser acotada no cumple el tercer requisito. La propiedad de tener dominio contenido en $\mathbb{D}$, es decir, $(f, \Omega) \in P$ si $\Omega \subset \mathbb{D}$, no cumple el segundo requisito.

La propiedad P dada por $(f, \Omega) \in P$ si $f(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ es de Zalcman.

Teorema 5.50 (Principio de Bloch/Teorema de Zalcman) *Sea P una propiedad de Zalcman. Entonces son equivalentes:*

α) *Las funciones enteras (meromorfas en $\mathbb{C}$) que cumplen P son constantes.*

β) *Para cualquier dominio Ω la familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas (meromorfas) en Ω que cumplen P es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.*

γ) *Para un dominio Ω, la familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas (meromorfas) en Ω que cumplen P es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.*

demostración. $\alpha) \Rightarrow \beta)$. Sea Ω un dominio y sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones holomorfas (meromorfas) en Ω que cumplen P. Si la familia $\mathcal{F}$ no fuera normal, el lema 5.48 de Zalcman, y el hecho de que P es propiedad de Zalcman, nos daría una función entera (meromorfa en $\mathbb{C}$) no constante (pues cumpliría $f^\sharp(0) = 1$), y que satisface P.

$\gamma) \Rightarrow \alpha)$. Sea Ω el dominio dado en γ) y sea $a \in \Omega$ cualquiera. Sea f una función entera (meromorfa) que cumple P en $\mathbb{C}$. Queremos probar que f es constante. Fijemos $b \in \mathbb{C}$ y comprobemos que $f^\sharp(b) = 0$.

Para cada entero $n \geq 1$, la función $f_n(z) = f(n(z-a)+b)$, para $z \in \mathbb{C}$, cumple P en $\mathbb{C}$, por la segunda condición de la propiedad de Zalcman. Por la primera condición de propiedad de Zalcman de P, la familia $\mathcal{F}$ que consiste de la f_n cumple en Ω la propiedad P. Por γ), $\mathcal{F}$ es una familia $\widehat{\mathbb{C}}$-normal en $\mathbb{C}$. En particular, la sucesión $(f_n'(a))_{n \geq 1}$ ha de estar acotada, lo que implica que $f^\sharp(b) = 0$, como queríamos. ■

El lector habrá observado cómo el argumento para ver que $\gamma) \Rightarrow \alpha)$ es de hecho el mismo que hemos usado en los ejemplos 5.5.2 y 5.6.1, que son casos particulares. Asimismo, observe, lector, que en la demostración de la implicación $\gamma) \Rightarrow \alpha)$ no ha hecho falta la tercera condición de la propiedad de Zalcman.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 5

Convergencia

5.6.1 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Demuéstrese que una sucesión $(f_n)_n$ de funciones holomorfas en Ω converge a f (holomorfa en Ω) uniformemente sobre compactos de Ω si y sólo si $(f_n)_n$ converge a f uniformemente en cada circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\} \subset \Omega$.*

5.6.2 *Compruébese que la sucesión $(f_n)_n$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ dadas por*

$$f_n(z) = \frac{nz^{n+1}}{1-z^2}, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

no converge uniformemente en $\mathbb{D}$, aunque sí converge $(a\ 0)$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$.

5.6.3 *Demuéstrese que la sucesión de funciones $(\tan(n\,z))_{n\geq 1}$ converge a la constante $-\imath$ uniformemente sobre compactos de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$.*

5.6.4 *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$. Demuéstrese que si f tiene k ceros (contando multiplicidades) en Ω, entonces para un $N \geq 1$ se tiene que f_n tiene al menos k ceros en Ω, para cada $n \geq N$.*

5.6.5 *Sea ω una función holomorfa de $\mathbb{D}$, con $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y tal que $\omega(0) = 0$ (es decir, ω es un subordinador). Sea ω_n la composición de ω consigo mismo n veces: $\omega_1 \equiv \omega$ y $\omega_n = \omega_{n-1} \circ \omega$, para $n \geq 1$. Demuéstrese que si $|\omega'(0)| < 1$, entonces ω_n converge a 0 uniformemente sobre compactos.*

5.6.6 Convergencia de partes reales en $\mathbb{D}$. *Sean $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$, f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y z_0 un punto cualquier (fijo) en $\mathbb{D}$.*

Supongamos que

1) $\Re(f_n) \overset{\mathbb{D}}{\Longrightarrow} \Re(f)$,
2) $f_n(z_0) \to f(z_0)$ *cuando* $n \to \infty$.

Compruébese que $f_n \overset{\mathbb{D}}{\Longrightarrow} f$. Dése un ejemplo para demostrar que la condición 2) es necesaria.

El ejercicio 5.6.6 afirma que la convergencia uniforme sobre compactos de las partes reales implica la convergencia uniforme sobre compactos de las propias funciones, si al menos hay convergencia puntual en un punto.

SUGERENCIA: Reducir al caso $z_0 = 0$. Aplicar el lema de Borel–Carathéodory (ejercicio 4.8.6) a $f_n - f$.

En el siguiente ejercicio 5.6.7 se extiende el resultado del ejercicio 5.6.6 a dominios generales.

5.6.7 CONVERGENCIA DE PARTES REALES EN UN DOMINIO Ω. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Sean $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω, f una función holomorfa en Ω y z_0 un punto cualquiera (fijo) en Ω.*

Supongamos que

1) $\Re(f_n) \overset{\Omega}{\Longrightarrow} \Re(f)$,

2) $f_n(z_0) \to f(z_0)$ *cuando* $n \to \infty$.

Compruébese que $f_n \overset{\Omega}{\Longrightarrow} f$.

SUGERENCIA: Denotemos por A el subconjunto de Ω formado por los puntos $z \in \Omega$ tales que $f_n \overset{\mathbb{D}(z,r)}{\Longrightarrow} f$ para algún $0 < r < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$. Compruébese, usando el ejercicio 5.6.6 que $z_0 \in A$. Compruébese que A es abierto y cerrado.

ESPACIO $\mathcal{C}(\Omega)$. ASCOLI–ARZELÀ

5.6.8 *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números complejos. Demuéstrese que existe una sucesión creciente de índices $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n+n_k} \text{ existe en } \mathbb{C} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Se entiende que para $n \leq 0$ la sucesión (a_{n+n_k}) está definida para los k tales que $n + n_k \geq 1$.

5.6.9 *Demuéstrese que si Ω es un dominio, entonces el espacio métrico $(\mathcal{C}(\Omega), D)$ es completo, y en consecuencia, $(\mathcal{H}(\Omega), D)$ es asimismo completo.*

5.6.10 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y z_0 un punto fijado de Ω. Considérese la familia $\mathcal{F}_L$, con $L > 0$, de funciones en $\mathcal{C}(\Omega)$ tales que*

$$|f(z) - f(w)| \leq L\,|z - w|\,, \quad \text{para todo } z, w \in \Omega\,,$$

y tales que

$$|f(z_0)| \leq 1\,.$$

Compruébese que la familia $\mathcal{F}_L$ es relativamente compacta en $\mathcal{C}(\Omega)$.

5.6.11 TEOREMA DE ASCOLI–ARZELÀ EN ESPACIOS MÉTRICOS. *Sea (X, d_X) un espacio métrico separable. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas en (X, d_X) con valores en un espacio métrico (Y, d_Y). Demuéstrese que si $\mathcal{F}$ es equicontinua y si para todo $x \in X$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto, entonces de toda sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de X.*

5.6.12 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en Ω y sea $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ la familia de derivadas de funciones en $\mathcal{F}$.*

I) *Demuéstrese que si $\mathcal{F}$ es una familia normal, entonces $\mathcal{F}'$ es asimismo normal.*
II) *Dése un ejemplo para comprobar que el recíproco de la afirmación anterior no es cierto.*
III) *Compruébese que si $\mathcal{F}'$ es normal y si para un cierto $z_0 \in \Omega$ se tiene que $\sup_{f\in\mathcal{F}}\{|f(z_0)|\} < +\infty$, entonces $\mathcal{F}$ es normal.*

5.6.13 *Determínese si son normales o no cada una de las siguientes familias de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$:*

$$\mathcal{F}_1 = \Big\{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : \Big|f(z) - \frac{1}{1-z^2}\Big| \le 1, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\Big\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \Big\{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : \big|f(z)\cdot(1-z^2)\big| \le 1, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\Big\}$$
$$\mathcal{F}_3 = \Big\{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : f(0) = 0 \text{ y } |f'(z)|(1-|z|^2) \le 1, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\Big\}$$
$$\mathcal{F}_4 = \Big\{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : f(0) = 1 \text{ y } \Re f(z) > 0, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\Big\}$$
$$\mathcal{F}_5 = \Big\{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : f(0) = 0 \text{ y } |f''(z)|(1-|z|^2) \le 1, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\Big\}$$

5.6.14 *Sea Ω un dominio en el plano complejo tal que $0 \in \Omega$. Se considera la familia*

$$\mathcal{F} = \big\{f \text{ holomorfa en } \Omega : |f^{(n)}(0)| < 1, \quad \text{para cada } n \ge 0\big\}.$$

I) *Demuéstrese que para toda función $f \in \mathcal{F}$, existe una función entera $\widetilde{f}$ tal que $f = \widetilde{f}_{|\Omega}$.*
II) *Demuéstrese que la familia $\mathcal{F}$ es normal.*

5.6.15 *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$. Para cada $f \in \mathcal{F}$ denotemos por $a_n(f)$ al n-ésimo coeficiente del desarrollo de Taylor de f alrededor del origen.*

Demuéstrese que $\mathcal{F}$ es normal si existe una sucesión de números reales positivos M_n tales que

I) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} \le 1$,
II) $|a_n(f)| \le M_n$ *para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

5.6.16 *Sea $\mathcal{F}$ una familia normal de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$. Compruébese que la familia $\mathcal{H}$ de funciones h que se expresan en la forma*

$$h(z) = e^{z^2} f(z) - \frac{g(z)^2}{(1-z^2)^3}$$

es normal.

5.6.17 Un teorema de Montel. *Sea f una función holomorfa en la banda $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < 1\}$ y con valores en $\mathbb{D}$. Supóngase que*

$$\lim_{\substack{x\in\mathbb{R};\\ x\to+\infty}} f(x) = 0\,.$$

Demuéstrese que para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $|y| < 1$ se tiene que

$$\lim_{\substack{x\in\mathbb{R};\\ x\to+\infty}} f(x+iy) = 0\,.$$

sugerencia: Considérese $A = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : 0 < x < 2, |y| < 1\}$ y la sucesión $(f_n)_n$ de funciones holomorfas en A dadas por $f_n(z) = f(z+n)$. Apélese al teorema 5.36 de Vitali–Porter.

5.6.18 *Sea Ω un domino en $\mathbb{C}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω tales que $f_n(\Omega) \subset \mathbb{D}\setminus\{0\}$, para cada $n \geq 1$. Supóngase que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 0$. Demuéstrese que entonces f_n converge uniformemente sobre compactos de Ω a 0.*

sugerencia: Hurwitz.

5.6.19 *Sea Ω un domino en $\mathbb{C}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω tales que $f_n(\Omega) \subset \mathbb{D}$, para cada $n \geq 1$. Supóngase que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 1$. Demuéstrese que entonces f_n converge uniformemente sobre compactos de Ω a la constante 1.*

5.6.20 *Sea Ω un dominio, $a \in \Omega$ y $\delta > 0$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones holomorfas en Ω, tales que*

i) *$f(\Omega) \subset \mathbb{D}$,*

ii) *f no se anula en todo Ω,*

iii) *$|f'(a)| \geq \delta$.*

Demuéstrese que la familia $\mathcal{F}$ es compacta.

sugerencia: Hurwitz.

5.6.21 *Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ que cumplen las siguientes tres condiciones:*

I) $1/2 \leq |f(0)| \leq 2$,

II) $\mathbb{D}(-2,1) \setminus f(\mathbb{D}) \neq \emptyset$,

III) $\mathbb{D}(2,1) \setminus f(\mathbb{D}) \neq \emptyset$.

Compruébese que $\mathcal{F}$ es una familia normal. ¿Es $\mathcal{F}$ compacta?

SUGERENCIA: Schottky.

5.6.22 *Sea F una función biholomorfa de $\mathbb{D}$ sobre un dominio convexo Ω. Sea $F(0) = a \in \Omega$ y sea $A = |F'(0)|$. Compruébese que para toda función f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(0) = a$ se tiene que*

$$|a_n(f)| \leq A\,, \quad \textit{para cada } n \geq 1\,.$$

Familias normales de funciones meromorfas

5.6.23 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Para cada $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ se define la función f_w en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ dada por $f_w(z) = f(w\,z)$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Comprbar que la familia $\mathcal{F} = \big\{f_w : w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}\big\}$ no es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal si y sólo si f tiene una singularidad esencial en $z = 0$.*

5.6.24 H. ROYDEN *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas en un dominio Ω. Si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una función creciente $h_K : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que*

$$|f'(z)| \leq h_K(|f(z)|)\,, \quad \textit{para todo } z \in K\,.$$

Solución. [39]

5.6.25 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Sea $\delta > 0$ y sea $\mathcal{P}_\delta$ la familia de las funciones f meromorfas en Ω que omiten al menos tres puntos $\{a_f, b_f, c_f\}$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ tales que*

$$c(a_f, b_f) \geq \delta,\ c(c_f, b_f) \geq \delta,\ c(a_f, c_f) \geq \delta\,.$$

Compruébese que $\mathcal{P}_\delta$ es una familia $\widehat{\mathbb{C}}$-normal.

5.6.26 *Sea f una función entera. Fijemos un anillo*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : c < |z| < d\}\,,$$

donde $0 < c < d < +\infty$.

Para cada $n \geq 1$, sea f_n la función holomorfa $f_n(z) = f(nz)$, para $z \in A$. Compruébese que $\mathcal{F}$ es normal si y solo si f es una constante y que $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$-normal si y solo si f es un polinomio.