Capítulo 2

Principio del módulo máximo

ALGUNOS HÉROES: Schwarz, Phragmén, Lindelöf, Hadamard, Hardy, Denjoy, Ahlfors, ...

Esto es lo que (el gran) Ahlfors, [1], tiene que decir como presentación del principio del módulo máximo:

> *Because of its simple and explicit formulation it is one of the most useful theorems in the theory of functions. As a rule all proofs based on the maximum principle are very straightforward and preference is quite justly given to proofs of this kind.*

¡Que conste!

2.1. Principio del módulo máximo

El principio del módulo máximo afirma que el módulo $|f|$ de una función holomorfa f no puede tener puntos donde alcance máximos, salvo en el caso trivial en el que f sea constante.

Enunciaremos primero una versión de este principio cuando este máximo putativo sea global, y luego otra cuando sea local.

Teorema 2.1 (Principio del módulo máximo, global) *Sea f una función holomorfa en un dominio Ω y sea $z_0 \in \Omega$. Si*

$$(\star) \quad |f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad \textit{para todo } z \in \Omega\,,$$

entonces f es constante.

En otros términos, si para una función holomorfa f en un dominio Ω, la función real $|f|$ (módulo de f, definida en Ω y con valores en $[0, +\infty)$), tiene un máximo *global* en un punto $z_0 \in \Omega$, entonces f es constante.

Deducimos a continuación este principio del teorema de la aplicación abierta.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos (con afán de contradicción) que f no es constante. El teorema de la aplicación abierta nos dice entonces que la imagen $f(\Omega)$ es un conjunto abierto.

Denotemos $R = |f(z_0)|$. Obsérvese que $R > 0$, porque si fuera $R = 0$ se tendría, por $(\star)$, que $f \equiv 0$.

La condición $(\star)$ se traduce en que $f(\Omega) \subset \overline{\mathbb{D}}(0, R)$ y además que $f(z_0) \in \partial\mathbb{D}(0, R)$, así que $f(z_0) \in \partial\Omega$, que contradice que $f(\Omega)$ sea abierto. ■

☞ **Nota** 2.1.1. ☜ Obsérvese que un uso análogo del teorema de la aplicación abierta nos diría que si $\Re(f)$ o $\Im(f)$ o $\Re(f) + \Im(f)$ o $|\Re(f)| + |\Im(f)|$ o $|\Re(f)\Im(f)|$ o ... tuviera un máximo global en un punto interior de Ω, entonces f sería constante. ♠

La versión *local* del principio del módulo máximo que sigue a continuación es un corolario de la global, aunque su enunciado (con menos hipótesis e igual conclusión) sea más potente.

Teorema 2.2 (Principio del módulo máximo, local) *Sea f una función holomorfa en un dominio Ω y sea $z_0 \in \Omega$. Si para $0 < \delta < \operatorname{dist}(z_0, \partial\mathbb{D})$ se tiene*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}(z_0, \delta)\,,$$

entonces f es constante.

En otros términos, si la función *real* $|f|$ tiene un máximo *local* en $z_0 \in \Omega$, entonces f es constante.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2. Por el principio del módulo máximo global, teorema 2.1, aplicado a la función f restringida al disco $\mathbb{D}(z_0, \delta)$, se concluye que $f \equiv f(z_0)$ en ese disco. Por el principio de unicidad se deduce que $f \equiv f(z_0)$ en todo Ω. ■

Al siguiente teorema, en realidad un corolario directo del teorema 2.2, apelaremos con harta frecuencia.

Teorema 2.3 (Cota del borde pasa a interior) *Sea Ω un dominio acotado. Sea f una función holomorfa en Ω y continua en* $\mathrm{cl}(\Omega)$. *Si para un cierto M se tiene que*

$$|f(z)| \leq M\,, \qquad \textit{para todo } z \in \partial\Omega\,,$$

entonces

$$|f(z)| \leq M\,, \qquad \textit{para todo } z \in \mathrm{cl}(\Omega)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. $|f|$ tiene máximo en $\mathrm{cl}(\Omega)$. Si el máximo se alcanza en $z_0 \in \Omega$ entonces, por el teorema 2.2, f es contante en todo Ω y por tanto, por continuidad, en $\mathrm{cl}(\Omega)$, y el módulo de ese valor constante no ha de exceder a M. Si ese máximo se alcanza en $z_0 \in \partial\Omega$, entonces $|f(z)| \leq |f(z_0)| \leq M$, para todo $z \in \Omega$. ■

Obsérvese que $\mathrm{cl}(\Omega)$ compacto equivale a Ω acotado. En otros términos, el enunciado afirma que $\text{máx}_{z\in\mathrm{cl}(\Omega)} |f(z)| = \text{máx}_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$. Ambos máximos existen y son finitos por la compacidad de $\mathrm{cl}(\Omega)$ y la continuidad de f en $\mathrm{cl}(\Omega)$.

En formulación alternativa, el teorema 2.3 dice que *una cota de $|f|$ en $\partial\Omega$ se propaga a, y es válida en, todo el interior de* Ω.

En ciertos ambientes, al teorema 2.3 es a quién se conoce como principio del módulo máximo.

A. Sobre las hipótesis de acotación, dominio y función, en el principio del módulo máximo

Los dos ejemplos que vamos a exhibir seguidamente mostrarán la necesidad en las hipótesis del enunciado del teorema 2.3 de que el dominio Ω sea acotado y de que la función $|f|$ esté acotada en *todo* el borde $\partial\Omega$.

EJEMPLO 2.1.1 *Para un dominio Ω no acotado, la conclusión del teorema* 2.3 *no es cierta aunque f esté acotada en todo el borde $\partial\Omega$ (si no se añaden hipótesis adicionales). De hecho, de ser $|f|$ acotada en el borde de Ω no se deduce que $|f|$ lo esté en Ω.*

Tomemos como Ω el semiplano superior $\Omega = \mathbb{H}$ (que es no acotado). Sea f la función entera dada por $f(z) = e^{-iz}$. Si $z \in \partial\mathbb{H}$, es decir, si $z \in \mathbb{R}$, entonces $|f(z)| = 1$. Para y real, $y > 0$, se tiene $f(iy) = e^y$, pero $iy \in \mathbb{H}$ y $|f(iy)| \to +\infty$, cuando $y \to +\infty$. ♣

Los teoremas de Phragmén–Lindelöf son versiones del principio del módulo máximo en dominios acotados con hipótesis adicionales sobre Ω y sobre f, válidas para dominios Ω no acotados y para funciones holomorfas f no acotadas en todo el borde. El apartado 2.2 está dedicado a describir el «*método*» *de Phragmén–Lindelöf.*

Ejemplo 2.1.2 *Si la función f no está acotada en todo el borde de Ω, la conclusión del teorema* 2.3 *no es cierta aunque el dominio Ω esté acotado* (*si no se añaden hipótesis adicionales*). *De hecho, no se puede concluir que $|f|$ esté acotada en Ω.*

Tomemos como dominio Ω al disco unidad $\Omega = \mathbb{D}$. Y como función f a la dada por

$$f(z) = \exp\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big), \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

La función f es la composición de la transformación de Möbius $U(z) = \frac{1+z}{1-z}$, que lleva el disco unidad $\mathbb{D}$ en el semiplano de la derecha, seguida de la función exponencial.

La transformación U lleva $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ en el eje imaginario $\imath\mathbb{R}$ y $U(1) = \infty_{\mathbb{C}}$. La función f es continua en $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ y para $z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ se tiene que $|f(z)| = 1$. Pero, por ejemplo,

$$\lim_{r\uparrow 1} |f(r)| = +\infty. \qquad \clubsuit$$

El lector atento, ¡cómo no!, se habrá percatado sin duda de que los dos ejemplos anteriores son en realidad uno solo con la transformación de Möbius U actuando en el papel de traductor.

En el teorema 2.15 el lector podrá encontrar un teorema del módulo máximo para dominios Ω no acotados con la hipótesis adicional de que $|f|$ se supone acotada ab initio. Más aún el método de Phragmén–Lindelöf, que nos ocupará a lo largo del apartado 2.2, da lugar a todo un cúmulo de resultados de módulo máximo para dominios Ω no acotados, en los que se impone una restricción adicional (específica) sobre el crecimiento de $|f(z)|$ cuando $z \to \infty_{\mathbb{C}}$.

B. Unas primeras aplicaciones del principio del módulo máximo

Del principio del módulo máximo se deduce que la convergencia uniforme en el borde se traslada en convergencia uniforme en el interior del dominio, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.3 *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio acotado Ω y sea f una función holomorfa en Ω. Si la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ tiende a f uniformemente en* (*el compacto*) *$\partial\Omega$, entonces f_n tiende a f uniformemente en todo $\overline{\Omega}$.*

Este hecho se sigue directamente de que el teorema 2.3 nos da que

$$\max_{z\in \mathrm{cl}(\Omega)} |f_n(z) - f_n(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f_n(z) - f(z)|\,. \qquad \clubsuit$$

Disponemos asimismo de un *principio del módulo mínimo*, con un matiz, como se recoge en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.4 ***Principio del módulo mínimo***. *Sea f una función holomorfa en un dominio Ω. Supongamos que $|f|$ tiene un mínimo local positivo en un punto $z_0 \in \Omega$. Entonces f es constante.*

En otros términos, la hipótesis exige que $|f(z)| \geq |f(z_0)| > 0$, para todo $z \in \mathbb{D}(z_0, \delta)$, para un cierto $0 < \delta < \operatorname{dist}(z_0, \partial\mathbb{D})$.

Por supuesto, si no exigimos que $|f(z_0)| > 0$, no se puede concluir que f sea constante, porque la hipótesis de mínimo local se cumpliría en todo cero de la función f. Por ejemplo, la función $f(z) = z$, para $z \in \mathbb{D}$, cumple $|f(z)| \geq 0 = |f(0)|$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Para verificar este principio de módulo mínimo, consideremos la función $g = 1/f$. Esta función g es meromorfa en Ω y holomorfa en $\mathbb{D}(z_0, \delta)$ pues f no se anula en ese disco. En ese disco, $|g|$ tiene un máximo local, así que g y, por consiguiente, f, es constante en ese disco. Pero entonces la función holomorfa f, por el principio de unicidad, es constante en todo el dominio Ω. ♣

Ejemplo 2.1.5 *Una demostración de E. Landau (de una versión) del principio del módulo máximo.*

Supongamos que f es una función holomorfa en un dominio Ω y que γ es un camino simple cerrado rectificable contenido en Ω y con interior $\operatorname{Int}(\gamma) \subset \Omega$. Supongamos que para una cierta constante $M > 0$ se tiene $|f(w)| \leq M$ para todo $w \in \gamma$. Vamos a comprobar que entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$.

Fijemos, por ahora, un entero $n \geq 1$. Fijemos $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$. Si aplicamos la fórmula de Cauchy a la potencia f^n obtenemos

$$f^n(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\gamma \frac{f^n(w)}{(z-w)}\, dw\,.$$

Si denotamos con $d > 0$ a la distancia de z a γ, podemos acotar

$$|f^n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} M^n \, \frac{\operatorname{long}(\gamma)}{d}\,.$$

Manteniendo fijo a z, tomando raíces n-ésimas, y haciendo límite cuando $n \uparrow \infty$ se deduce que

$$|f(z)| \leq M\,,$$

pues $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$, para todo número real $a > 0$. ♣

C. Módulo máximo sin continuidad en el borde

En el teorema 2.3 se pasa de una cota para $|f|$ en $\partial\Omega$ a una cota de $|f|$ en todo Ω. La función f del enunciado se ha supuesto continua hasta el borde $\partial\Omega$. Como vamos a ver a continuación, esta hipótesis es innecesariamente restrictiva.

Corolario 2.4 *Sea Ω un dominio acotado y sea f una función holomorfa en Ω.*

Si

$$\limsup_{z\to w} |f(z)| \le M\,, \qquad \textit{para todo } w \in \partial\Omega\,,$$

entonces

$$|f(z)| \le M\,, \qquad \textit{para todo } z \in \Omega\,.$$

La idea es sencilla: en subdominios Ω_ε de Ω con clausura contenida en Ω que cada vez cubran más (cuando $\varepsilon \to 0$) de Ω tendremos $|f(w)| \le M + \varepsilon$ para todo $w \in \partial\Omega_\varepsilon$; aplicamos el teorema 2.3 a Ω_ε y luego hacemos $\varepsilon > 0$. Veamos.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $z_0 \in \Omega$ y sea $d = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > 0$. Vamos a probar que $|f(z_0)| \le M$.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Para cada $w \in \partial\Omega$ existe $r_w > 0$ (que tomamos ya $r_w < d$) tal que $|f(z)| \le M + \varepsilon$, si $z \in \Omega \cap \mathbb{D}(w, r_w)$. Por compacidad de $\partial\Omega$ obtenemos un conjunto finito $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tal que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathbb{D}(w_j, r_{w_j}/2)\,.$$

Sea $\Omega_\star$ la componente de $\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \mathbb{D}(w_j, r_{w_j}/2)$ que contiene a z_0. La clausura de $\Omega_\star$ está contenida en Ω, así que f es holomorfa en $\Omega_\star$ y continua hasta su borde. Además, si $w \in \partial\Omega_\star$ tenemos que $|f(w)| \le M + \varepsilon$; para esto hemos dividido por 2 los radios r_w al cubrir $\partial\Omega$. Por el teorema 2.3 se deduce que $|f(z)| \le M + \varepsilon$, para todo $z \in \Omega_\star$. En particular,

$$|f(z_0)| \le M + \varepsilon\,.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, concluimos que $|f(z_0)| \le M$. ■

2.1.1. Comportamiento local de $|f|$ y principio del módulo máximo

Podemos calificar, y si el lector no manifiesta inconveniente alguno, calificamos, la demostración del principio del módulo máximo basada en el teorema de la aplicación abierta como «geométrica». Seguidamente verificaremos el principio del módulo máximo desde un punto de vista alternativo, digamos, «analítico»; de nuevo, si el lector lo tiene a bien.

Supongamos que f es una función holomorfa no constante en un dominio Ω. Sea z_0 un punto de Ω. Sea $R > 0$ tal que $\operatorname{cl}(\mathbb{D}(z_0, R)) \subset \Omega$.

Denotemos por $k \ge 1$ el orden de la primera derivada de f en z_0 que no es nula. Hay un tal k, pues si $f^{(j)}(z_0) = 0$, para todo $j \ge 1$, entonces el desarrollo en serie de potencias de f alrededor de z_0 nos daría que $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$, lo que a su vez y por el principio de ceros aislados implicaría que $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in \Omega$.

En el disco $\mathbb{D}(z_0, R)$ se tiene que

$$(\natural) \quad f(z) = f(z_0) + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + O(|z - z_0|^{k+1})\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{D}(z_0, R)\,.$$

Como $|f(z)|^2 = f(z)\,\overline{f(z)}$, se deduce de ($\natural$) que

$$(\natural\natural)\qquad \begin{aligned} |f(z)|^2 &= |f(z_0)|^2 \\ &+ 2\Re\big(\overline{f(z_0)}\,\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\big) + O(|z-z_0|^{k+1})\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{D}(z_0, R)\,. \end{aligned}$$

Si $f(z_0) \neq 0$, escribimos

$$\overline{f(z_0)}\,\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = s_0\, e^{\imath\sigma_0}$$

y ponemos $z = z_0 + r\, e^{\imath\theta}$, de manera que ($\natural\natural$) deviene

$$(\natural\natural\natural)\qquad |f(z)|^2 = |f(z_0)|^2 + 2s_0 r^k \cos(\sigma_0 + k\theta) + O(r^{k+1})\,, \quad \text{para } 0 \le r < R \text{ y } \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Esta expresión ($\natural\natural\natural$) nos dice que si $k \geq 2$, entonces $|f(z)|$ tiene en z_0 un punto de silla, (para $k = 2$ una silla de montar, para $k = 3$ una silla de mono, en la jerga al uso, etc) y que si $k = 1$, entonces la función $|f(z)|^2$ no tiene ni máximo, ni mínimo ni punto de silla en z_0.

La conclusión de este análisis local de $|f(z)|^2$, en el asunto del principio del módulo máximo que nos traemos entre manos, es que si $f(z_0) \neq 0$ entonces $|f(z)|$ no tiene en z_0 ni máximo local ni mínimo local. Por supuesto, si $f(z_0) = 0$, entonces $|f(z)|$ tiene un mínimo absoluto.

Imagine lector un suave bucólico y ondulante paisaje en el que no hay ni máximos ni mínimos, así es la gráfica del módulo de una función holomorfa que no se anula en ningún punto.

2.1.2. Productos de Blaschke (finitos)

Sigue un ejemplo de rigidez, tan propio de la teoría de funciones de variable compleja:

Ejemplo 2.1.6 *Si f es holomorfa en* $\text{cl}(\mathbb{D})$ *y* $|f| \equiv 1$ *en* $\partial\mathbb{D}$*, entonces, o bien f es una constante* (*de módulo* 1)*, o bien* $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Supongamos que f no es constante. Por el teorema 2.3 tenemos que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, y como f no es constante, se tiene, de hecho, que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

Resta comprobar que $\mathbb{D} \subseteq f(\mathbb{D})$. Primero, verificamos que f tiene al menos un cero en $\mathbb{D}$, es decir, que $0 \in f(\mathbb{D})$.

Veamos. Si f no se anulara en $\mathbb{D}$ entonces $1/f$ sería asimismo holomorfa en $\text{cl}(\mathbb{D})$ y $|1/f(z)| = 1$, para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Por tanto, aplicando a $1/f$ el mismo argumento que a f deduciríamos que $|1/f(z)| < 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$, lo que supone una contradicción. Así que f toma el valor 0 en algún punto de $\mathbb{D}$.

Sea ahora $a \in \mathbb{D}$, cualquiera. Consideremos la transformación de Möbius $S_a(z) = (z-a)/(1-z\bar{a})$ que lleva $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$, $\partial\mathbb{D}$ sobre $\partial\mathbb{D}$ y a en 0. Definamos g_a como la composición $g_a = S_a \circ f$. Esta función g_a es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y además $|g_a(z)| = 1$, para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Por tanto g_a toma el valor 0 en algún punto $z_a \in \mathbb{D}$, de manera que $f(z_a) = a$. Es decir, $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. ♣

Las funciones f del ejemplo 2.1.6 anterior: f holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y con $|f| \equiv 1$ sobre $\partial\mathbb{D}$, son de hecho muy especiales y admiten una representación explícita y concreta. Vamos con ella.

Como f es continua en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y tiene módulo 1 en $\partial\mathbb{D}$, la función f sólo puede tener un número finito de ceros en $\mathbb{D}$, porque si tuviera un número infinito éstos habrán de acumularse: no pueden hacerlo en $\mathbb{D}$, porque entonces $f \equiv 0$, y no pueden hacerlo en $\partial\mathbb{D}$ porque sobre $\partial\mathbb{D}$ se tiene que $|f| \equiv 1$ continuamente. Pongamos entonces que los ceros de f en $\mathbb{D}$ son $a_1, a_2, \ldots, a_n$ repitiéndose (si falta hiciera) según su multiplicidad; así que el número total de ceros de f contando multiplicidad es n. Sea B la función holomorfa:

$$B(z) = \prod_{j=1}^{n} S_{a_j}(z)\,.$$

Obsérvese que $|B(z)| = 1$ para cada $z \in \partial\mathbb{D}$. La función $g(z) = f(z)/B(z)$ es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ pues tiene singularidades evitables en los a_j, no se anula en $\mathbb{D}$, y además $|g(z)| = 1$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Por el ejemplo 2.1.6 anterior, si g no fuera constante, g tendría que anularse. Así que g es una constante (de módulo 1), digamos $e^{i\theta}$. De manera que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$(\star) \quad f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - z\bar{a}_j}\,.$$

Recíprocamente, toda función f dada por $(\star)$ es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y cumple que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. ♣

Si $a_1, \ldots, a_n$ son puntos cualesquiera (quizás con repeticiones) del disco unidad $\mathbb{D}$, a la función racional dada por

$$B(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - z\,\overline{a_j}}$$

se le conoce como **producto de Blaschke (finito)**. Más adelante encontraremos productos de Blaschke infinitos. Estos productos de Blaschke van a ser muy útiles (tanto los finitos como los infinitos) en lo que sigue. Obsérvese que el producto de Blaschke B es una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$, tiene ceros en los puntos $a_1, \ldots, a_n$ y polos en los inversos de sus conjugados: $1/\overline{a_1}, \ldots, 1/\overline{a_n}$. Obsérvese que para todo $a \in \mathbb{C}$, los puntos a y $1/\bar{a}$ son *simétricos* respecto del círculo unidad.

Un producto de Blaschke B es holomorfo en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y cumple que $|B(z)| = 1$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Un tal B es una función racional en $\mathbb{C}$ y cumple la simetría (respecto de $\partial\mathbb{D}$) siguiente:

$$\overline{B(z)}B(\bar{z}) = 1\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Resumiendo:

Lema 2.5 *Las funciones f holomorfas en* $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ *y tales que* $|f(z)| = 1$*, para todo z con $|z| = 1$ son exactamente aquellas que se expresan como*

$$f(z) = e^{i\theta} B(z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

donde θ es un cierto número real y B un producto de Blaschke finito.

☞ **Nota** 2.1.2. ☜ Sea B un producto de Blaschke finito. Como $|B(z)| < 1$ si $|z| < 1$ y $|B(z)| > 1$ si $|z| > 1$, por el teorema fundamental del álgebra se tiene que para todo $w \in \mathbb{D}$ existen n puntos $z_1, z_2, \ldots, z_N$ (que pueden repetirse) en $\mathbb{D}$ y que son solución de la ecuación $B(z) = w$.

En otros términos, $B(\mathbb{D})$ cubre $\mathbb{D}$ exactamente n veces. ♠

2.1.3. Principio del máximo y del mínimo para funciones armónicas

Se dispone asimismo de un principio de máximo y de mínimo (sin módulo ni valor absoluto) para funciones armónicas que vamos a deducir a continuación del principio de módulo máximo para funciones holomorfas.

Usaremos en su deducción que si u es una función armónica en Ω entonces

- localmente, en discos $\mathbb{D}(z_0, \delta) \subset \Omega$, la función u es la parte real de una función holomorfa f,
- globalmente, la función $\bar{\partial} u \equiv \partial_x u - \imath \partial_y u$ es holomorfa en todo Ω.

Proposición 2.6 (Principio del máximo/mínimo para funciones armónicas) *Sea u una función armónica en un dominio Ω. Si u tiene un máximo local* (*o un mínimo local*) *en un cierto $z_0 \in \Omega$, entonces u es constante.*

El resultado para mínimo local se obtiene del de máximo local sin más que considerar $-u$ en lugar de u.

En la demostración de la proposición 2.6 usaremos el siguiente

Lema 2.7 *Sea u una función armónica en un dominio Ω, si u es constante en un disco $\mathbb{D}(z_0, \delta) \subset \Omega$, con $\delta > 0$, entonces u es constante en todo Ω.*

Así que si dos funciones armónicas u, v en un dominio Ω coinciden en un disco contenido en Ω, entonces $u \equiv v$ en todo Ω. Recuérdese que para funciones holomorfas f, g en Ω, basta con que f, g coincidan en una sucesión con punto de acumulación en Ω para poder concluir que $f \equiv g$ en Ω; pero para funciones armónicas se requiere la coincidencia en un disco, no basta con que coincidan en una sucesión con punto de acumulación en Ω. Por ejemplo, $u(z) = \Re(z)$ es armónica en todo $\mathbb{C}$ y coincide con $v \equiv 0$ en todo el eje real.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.7. Para verificar este lema vamos a dar dos argumentos. El primero de ellos es rápido y mortal; el segundo quizás sea más natural.

a) Consideremos la función f definida en Ω dada por

$$f(z) = \partial_x u(z) - i\partial_y u(z), \quad \text{para todo } z \in \Omega\,.$$

Nótese el signo "menos" en la parte imaginaria. La función f es holomorfa; de hecho $\Delta u \equiv 0$ equivale a que se verifican las ecuaciones de Cauchy–Riemann para f. Ahora $f \equiv 0$ en el disco $\mathbb{D}(z_0, \delta)$, pues u es allí constante. Por el principio de unicidad para funciones holomorfas se deduce que $f \equiv 0$ en todo Ω. y, por tanto, que $u_x \equiv 0 \equiv u_y$ en todo Ω. De donde se deduce que u es constante en Ω.

b) Para un segundo argumento de demostración supongamos sin pérdida de generalidad que $u \equiv 0$ en $\mathbb{D}(z_0, \delta)$.

Consideremos el conjunto

$$A = \big\{z \in \Omega;\ \text{existe } r > 0 \text{ tal que } \mathbb{D}(z, r) \subset \Omega \text{ y } u_{|_{\mathbb{D}(z,r)}} \equiv 0\big\}\,.$$

El conjunto A es no vacío; esta es la hipótesis del lema. El conjunto A es obviamente abierto en Ω. Si vemos que A es cerrado en Ω, la conectividad de Ω nos garantizaría que $A = \Omega$ y, en consecuencia, que $u \equiv 0$ en Ω.

Para verificar que A es cerrado en Ω, tomemos $z \in \Omega \cap \partial A$. Hemos de comprobar que $z \in A$. Sea $0 < r < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$. Como $A \cap \mathbb{D}(z, r) \neq \emptyset$, pues $z \in \partial A$, podemos tomar $a \in A \cap \mathbb{D}(z, r)$. Elijamos ahora $s > 0$ tal que $\mathbb{D}(a, s) \subset \mathbb{D}(z, r)$ y tal que $u \equiv 0$ en $\mathbb{D}(a, s)$. Sea v una función armónica conjugada de u en $\mathbb{D}(z, r)$ (que existe pues $\mathbb{D}(z, r)$ es simplemente conexo) y sea f la función holomorfa $f = e^{u+iv}$. Como $|f| \equiv 1$ en $\mathbb{D}(a, s)$, el teorema de la aplicación abierta nos da que f es constante en $\mathbb{D}(a, s)$ y por el principio de unicidad, tenemos que f es constante en $\mathbb{D}(z, r)$. Pero entonces $|f| \equiv 1$ en todo $\mathbb{D}(z, r)$. Es decir, $u \equiv 0$ en $\mathbb{D}(z, r)$, y, por tanto, $z \in A$. Así que A es, como queríamos ver, cerrado en Ω. ■

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 2.6. Consideremos primero el caso particular en que Ω es simplemente conexo. En ese caso, la función u es la parte real de una función holomorfa g en Ω; la función f holomorfa en Ω y dada por $f = e^g$, tiene módulo $|f| = e^u$. Por tanto, $|f|$ tiene un máximo local en z_0, de donde, f es constante, y, por consiguiente, u es constante.

Volvamos al caso general. Por hipótesis, en un cierto disco $\mathbb{D}(z_0, \delta) \subset \Omega$, con $\delta > 0$ la función u alcanza un máximo absoluto en z_0. Este disco es simplemente conexo y con el argumento anterior deducimos que u es constante en ese disco. Si apelamos ahora al lema 2.7, deducimos finalmente que u es constante. ■

2.1.4. Principio del módulo máximo. Varias funciones

Supongamos que $f_1, \ldots, f_n$ son funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ y continuas en $\operatorname{cl}(\mathbb{D})$.

Proposición 2.8 *Si la función continua $z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D}) \mapsto \sum_{j=1}^n |f_j(z)|$ alcanza un máximo en $\mathbb{D}$ entonces* todas *las f_j son funciones constantes.*

Como consecuencia, se obtiene que

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \le \max_{\theta\in[0,2\pi]} \sum_{j=1}^{n} |f_j(e^{\imath\theta})|\,, \quad \text{para todo } z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D})\,.$$

Por ejemplo,

$$|1+z| + |1-z| \le 2\sqrt{2}\,, \quad \text{si } |z| \le 1\,.$$

El máximo de $|1+z|$ es 2 y se alcanza en $z = 1$ y el máximo de $|1-z|$ es 2 y se alcanza en $z = -1$. Pero el máximo de $|1+z| + |1-z|$ se alcanza en $z = \pm\imath$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, existe $a \in \mathbb{D}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \le \sum_{j=1}^{n} |f_j(a)|\,, \qquad \text{para todo } z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D})\,.$$

Componiendo con una transformación de Möbius, si hiciera falta, podemos suponer, por comodidad de referencia, que $a = 0$. Además, rotando las funciones f_j si fuera menester, podemos suponer asimismo que $f_j(0) \ge 0$, para $1 \le j \le n$.

Consideremos la función $h(z)$ holomorfa en $\mathbb{D}$ y continua en $\operatorname{cl}(\mathbb{D})$ dada por

$$h(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)\,, \qquad \text{para todo } z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D})\,.$$

Observe lector que

$$(\star) \quad |h(z)| \le \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \le \sum_{j=1}^{n} |f_j(0)| = \sum_{j=1}^{n} f_j(0) = h(0) = |h(0)|\,.$$

Por el principio del módulo máximo la función $h(z)$ es constante en $\mathbb{D}$. De hecho, $h(z) = h(0)$, para todo $z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D})$.

De $(\star)$ se deduce entonces que

$$(\star\star) \quad \Big|\sum_{j=1}^{n} f_j(z)\Big| = \sum_{j=1} |f_j(z)|\,, \qquad \text{para todo } z \in \operatorname{cl}(\mathbb{D})\,.$$

Supongamos que f_1 no es idénticamente cero. Sea U un entorno en $\mathbb{D}$ donde $f_1(z) \ne 0$ para $z \in U$. Las condiciones para que se tenga igualdad en una desigualdad triangular como la que se recoge en $(\star\star)$, nos dicen que en el entorno U y para $1 \le j \le n$ se tiene que $f_j(z)/f_1(z)$ es real (y positiva) para todo $z \in U$. Por el principio de la aplicación abierta, se deduce que $f_j(z)/f_1(z)$ es constante en U. Es decir, existe $\lambda_j \ge 0$, tal que $f_j(z) = \lambda_j f_1(z)$, para todo $z \in U$. Observe lector que $\lambda_1 = 1$ y que, por tanto, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ge 1$.

La función $h(z)$ en el entorno U se escribe entonces

$$h(z) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\Big)\, f_1(z)\,, \qquad \text{para todo } z \in U\,.$$

Como $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \neq 0$ y h es constante se deduce que $f_1(z)$ es constante en U, y, por el principio de unicidad se concluye que $f_1(z)$ es constante en $\mathbb{D}$.

De manera que para f_1 hay dos opciones o es idénticamente nula o es constante. En suma, f_1 es constante en $\mathbb{D}$. Análogamente, para las demás $f_2, \ldots, f_n$. ■

Proposición 2.9 *Si la función continua* $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \mapsto \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|^2$ *alcanza un máximo en* $\mathbb{D}$ *entonces* todas *las* f_j *son funciones constantes.*

En particular,

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|^2 \le \max_{\theta\in[0,2\pi]} \sum_{j=1}^{n} |f_j(e^{\imath\theta})|^2\,, \quad \text{para todo } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})\,.$$

demostración. El argumento es análogo al de la demostración de la proposición 2.8. Se usa la función auxiliar

$$h(z) = \sum_{j=1}^{n} \overline{f_j(0)}\, f_j(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})\,,$$

y la desigualdad de Cauchy–Schwarz en lugar de la desigualdad triangular. ■

☞ **Nota** 2.1.3. ☜ En general, con las notaciones anteriores, para $p \in [1, +\infty)$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|^p \le \max_{\theta\in[0,2\pi]} \sum_{j=1}^{n} |f_j(e^{\imath\theta})|^p\,, \quad \text{para todo } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})\,.$$

Para $p = +\infty$ se tiene que

$$\max_{1\le j\le n} |f_j(z)| \le \max_{\theta\in[0,2\pi]} \big(\max_{1\le j\le n} |f_j(e^{\imath\theta})|\big)\,.$$

♠

2.2. El método de Phragmén–Lindelöf

El método que da título a este apartado tiene su origen en un artículo de (Lars) Edvard Phragmén[1] y Enrst Lindelöf que bajo el título *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse* de 1908. La introducción de este artículo [34] reza así:

[1] Tres items de interés de la biografía de Phragmén: sustituyó a Sofia Kowaleskaya en la cátedra en la Universidad de Estocolmo, fue editor de Acta Mathematica durante 48 años, y a sus cuarenta años abandonó el mundo académico y se dedicó profesionalmente al ámbito de los seguros.

> *Les résultats que l'un de nous a fait connaitre dans ce journal son susceptibles d'être notablement étendus et précisés, en même temps qu'on peut les rattacher aux principes élémentaires de l'Analyse. On arrive ainsi à certains théorèmes nouveaux d'un caractère assez général, qui semblent appelés à jouer un rôle dans l'étude des fonctions monogènes dans le voisinage de leurs points singuliers.*

Con "principio elemental del análisis" se refieren al del módulo máximo. Las funciones monógenas (uniformes) a las que aluden son nuestras dilectas funciones holomorfas (o meromorfas). El "uno de ellos"es Phragmén. A fe que Phragmén y Lindelöf, con ese comentario, no iban muy descaminados.

El principio del módulo máximo, teorema 2.1 o el corolario 2.4 requieren un dominio Ω acotado y una función f holomorfa que está acotada en todo su borde.

El **método de Phragmén–Lindelöf** es una *técnica* que para funciones f holomorfas en un dominio Ω que están acotadas no en todo (pero sí en casi todo) el borde $\partial\Omega$ de Ω permite obtener conclusiones como las del principio del módulo máximo o similares, y casi de la misma utilidad. También permite gestionar dominios no acotados, simplemente, como veremos, considerando a $\infty_{\mathbb{C}}$ como un punto más de su borde.

Los ejemplos, o mejor, los no-ejemplos 2.1.1 y 2.1.2 ilustran el tipo de situaciones que queremos abordar. Repáselos, lector, si lo tiene a bien.

2.2.1. Phragmén–Lindelöf en semiplanos, en sectores y en bandas

La idea básica del método es la siguiente: aunque $|f|$ a priori no esté acotada en Ω, puede ocurrir, y así será, que tras dividirla por una función función F holomorfa en el dominio Ω (y que no se anule) resulte una función cociente f/F (holomorfa en Ω) tal que *a)* sí esté acotada en todo Ω y *b)* de manera que tengamos una cota para $|f/F|$ en el borde $\partial\Omega$. A esta función f/F le aplicaríamos el principio del módulo máximo para a partir de las cotas obtenidas (para $|f/F|$), deducir una acotación para f en Ω.

Proponemos, lector, analizar seguida y sucesivamente una serie de ejemplos de dominios, a saber, semiplanos, sectores y bandas, que nos ilustren (y entrenen) en la elección juiciosa y pertinente de estas funciones compensatorias F, comenzando, claro, con las situaciones de los mellizos ejemplos 2.1.1 y 2.1.2.

A. Semiplanos

Recordemos que en el ejemplo 2.1.1 exhibíamos una función $F(z)$ holomorfa en $\mathbb{H}$, continua hasta su borde $\partial\mathbb{H}$ y tal que $|F(z)| \leq 1$, para todo $z \in \partial\mathbb{H}$, pero tal que, sin embargo, F no estaba acotada en Ω. La función en cuestión no era otra sino nuestra muy estimada $F(z) = e^z$.

En la discusión que sigue vamos a suponer que f es una función holomorfa en $\mathbb{H}$

tal que

$$\limsup_{z\to w} |f(z)| \le 1\,, \qquad \text{para todo } w \in \partial\mathbb{H}\,.$$

Por comodidad referencial denotaremos a la clase de funciones que cumplen estas condiciones por $\mathcal{F}$. Queremos investigar posibles hipótesis adicionales sobre $f \in \mathcal{F}$ que permitan concluir acotaciones de $|f|$ sobre todo $\mathbb{H}$. Por cierto, la cota impuesta de 1 en la definición de $\mathcal{F}$ es tan sólo una normalización, si la cota fuera $M > 0$ aplicaríamos los resultados obtenido cuando $M = 1$ a la función f/M.

$\boxed{1}$ Una *primera idea* para formular una tal condición proviene de tratar sin mayores miramientos a $\infty_\mathbb{C}$ como *un punto más* de la frontera de $\mathbb{H}$. Supongamos pues, adicionalmente, que

$$\limsup_{\substack{z\in\mathbb{H},\\ z\to\infty_\mathbb{C}}} |f(z)| \le 1\,.$$

Así que en ese punto frontera especial $|f|$ tampoco excede 1.

Para aprovechar esta hipótesis adicional y llevar el argumento al ámbito más confortable de dominios acotados, argumentamos como sigue. Para cada $R > 0$, consideremos el dominio $\mathbb{H}_R = \mathbb{H} \cap \mathbb{D}(0, R)$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Entonces existe R_ε tal que

$$|f(z)| \le 1 + \varepsilon\,, \quad \text{si } z \in \mathbb{H} \text{ y } |z| \ge R_\varepsilon\,.$$

Para $R > R_\varepsilon$, la función f es holomorfa en el dominio acotado $\mathbb{H}_R$, y cumple que

$$\limsup_{z\to w} |f(z)| \le 1 + \varepsilon\,, \qquad \text{para todo } w \in \partial\mathbb{H}_R\,.$$

Por el corolario 2.4 del principio del módulo máximo, se concluye que, si $R > R_\varepsilon$, entonces

$$|f(z)| \le 1 + \varepsilon\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_R\,.$$

Si mantenemos fijo $z \in \mathbb{H}$ y tomamos $R > \text{máx}(|z|, R_\varepsilon)$, concluimos que

$$|f(z)| \le 1 + \varepsilon\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}\,,$$

y, por tanto, como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, que

$$|f(z)| \le 1\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}\,.$$

La *moraleja* del argumento que acabamos de desarrollar es que para un dominio Ω no acotado $\infty_\mathbb{C}$ es un punto más de su frontera y que para invocar el principio del módulo máximo basta con acotación en $\infty_\mathbb{C}$ análoga a la que se impone en los demás puntos *finitos* de $\partial\Omega$.[2]

$\boxed{2}$ Una *segunda idea* proviene de analizar el (no-)ejemplo $F(z) = e^z$. Para $z \in \partial\mathbb{H}$ se tiene que $|F(z)| = 1$; mientras que cuando $\Re(z) \to \infty$ tenemos que $|F(z)| \to \infty$. Además F no se anula en todo $\mathbb{H}$.

[2] ¡$\infty_\mathbb{C}$ es un amigo!, quizás un adversario, pero leal donde los haya.

Supongamos que para una función $f \in \mathcal{F}$ dada sabemos a priori que $|f|$ está acotada en todo $\mathbb{H}$ por, digamos, M, pero que desconocemos el valor de M.

Ahora nos apoyamos en $F(z) = e^z$. La función $g = f/F$ es holomorfa en $\mathbb{H}$, pues F no se anula. Para $w \in \partial\mathbb{H}$ se tiene que $\limsup_{z\to w} |g(z)| \le 1$, pues $|F(w)| = 1$ para tales w, y en $\infty_{\mathbb{C}}$ cumple que

$$(\star) \qquad \lim_{\substack{z\in\mathbb{H},\\ \Re(z)\to\infty}} |g(z)| = \lim_{\substack{z\in\mathbb{H},\\ \Re(z)\to\infty}} \frac{|f(z)|}{e^{\Re(z)}} = 0\,,$$

puesto que $|f|$ está, por hipótesis, acotada. Para g casi tenemos la situación descrita en el punto $\boxed{1}$ anterior; pero no del todo, ¿verdad?, lector, porque $(\star)$ requiere que $\Re(z) \to \infty$ y nos gustaría (hace falta) que ese límite se cumpliera simplemente con $|z| \to \infty$. Esta ¿carencia? no es culpa[3] de f, no, sino de F.

Pero, fijemos $0 < \alpha < 1$. La función $z \mapsto z^\alpha$ es holomorfa y lleva $\mathbb{H}$ en un sector de amplitud $\pi\alpha$ simétricamente ubicado dentro de $\mathbb{H}$. De hecho, si $z = re^{\imath\vartheta}$, con $|\vartheta| \le \pi$ y $r > 0$, entonces

$$\Re(z^\alpha) = |z|^\alpha \cos(\alpha\vartheta) \ge |z|^\alpha \cos(\alpha\pi).$$

Nótese que como $\alpha \in (0,1)$ se tiene que $\cos(\alpha\pi) > 0$, y que, por tanto, si $|z| \to \infty$ en $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$, entonces $\Re(z^\alpha) \to \infty$.

Definamos para $\alpha \in (0,1)$ la función F_α holomorfa en $\mathbb{H}$, continua hasta $\partial\mathbb{H}$ y que no se anula en $\mathbb{H}$, dada por

$$F_\alpha(z) = F(z^\alpha) = \exp(z^\alpha)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}\,.$$

Acabamos de ver que

$$|F_\alpha(z)| = e^{\Re(z^\alpha)} \ge e^{|z|^\alpha \cos(\alpha\pi)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}\,.$$

Fijemos $\alpha \in (0,1)$ y consideremos $g = f/F_\alpha$, con F_α en lugar de F como en el intento inicial.

Por tanto, como $\cos(\alpha\pi) > 0$ y $\alpha > 0$, se tiene que

$$(\star\star) \qquad \lim_{\substack{z\in\mathbb{H},\\ z\to\infty_{\mathbb{C}}}} |g(z)| = \lim_{\substack{z\in\mathbb{H},\\ z\to\infty_{\mathbb{C}}}} \frac{|f(z)|}{|F_\alpha(z)|} = 0\,.$$

Además, si $w \in \partial\mathbb{H}$ entonces

$$\limsup_{z\to w} |g(z)| \le 1/|F_\alpha(w)| \le e^{-|w|^\alpha \cos(\alpha\pi)} \le 1\,,$$

pues $\cos(\alpha\pi) > 0$.

Podemos entonces concluir, apelando al punto $\boxed{1}$, que $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{H}$ y, en consecuencia, que

$$|f(z)| \le |F_\alpha(z)| = e^{\Re(z^\alpha)} = e^{r^\alpha \cos(\alpha\vartheta)}\,, \quad \text{para todo } z = r\,e^{\imath\vartheta} \in \mathbb{H}.$$

[3]¡Pobriña!

Si fijáramos $z \in \mathbb{H}$ e hiciéramos tender $\alpha \downarrow 0$ concluiríamos que $|f|$ está acotada por el número e en todo $\mathbb{H}$.

Podemos (y queremos) mejorar esta acotación (que no está tan mal, lector). Fijemos como hasta ahora $\alpha \in (0,1)$, pero además tomemos $\varepsilon > 0$ y en lugar de F_α consideremos

$$F_{\alpha,\varepsilon}(z) = \exp(\varepsilon z^\alpha)\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{H}\,.$$

Esta función $F_{\alpha,\varepsilon}$ es holomorfa en $\mathbb{H}$ y no se anula en todo $\mathbb{H}$. Además

$$|F_{\alpha,\varepsilon}(z)| \geq e^{\varepsilon |z|^\alpha \cos(\alpha\pi)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}.$$

El mismo argumento que acabamos de desarrollar, pero con $F_{\alpha,\varepsilon}$ en el papel de F_α, permite concluir que

$$|f(z)| \leq |\exp(\varepsilon z^\alpha)| = e^{\varepsilon \Re(z^\alpha)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}\,.$$

Esto es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $\alpha \in (0,1)$. Si fijamos $z \in \mathbb{H}$ y hacemos $\varepsilon \downarrow 0$ concluimos que

$$|f(z)| \leq 1\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}.$$

¡Voilà!

$\boxed{3}$ Todavía *una vuelta de tuerca más*. El lector perspicaz habrá observado cómo en el argumento del punto anterior la clave ha sido la transición sucesiva de F a F_α y después a $F_{\alpha,\varepsilon}$.

En cuanto de f, tan sólo hemos usado la hipótesis de que f estaba acotada sobre todo $\mathbb{H}$ para concluir ($\star\star$); y aquí hay mucho margen de maniobra porque estas $F_{\alpha,\varepsilon}$ se van rápidamente a $\infty_\mathbb{C}$ cuando $z \to \infty_\mathbb{C}$.

Supongamos, en lugar de la hipótesis tan exigente de que $|f|$ está acotada en todo $\mathbb{H}$, tan solo que para un cierto $\beta \in [0,1)$ se cumple que

$$|f(z)| \leq B e^{|z|^\beta}\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{H}\,,$$

donde $B > 0$ es una cierta constante, o si se prefiere[4] más compactamente, que

$$\limsup_{\substack{z \in \mathbb{H},\\ |z| \to +\infty}} \frac{\ln(\ln|f(z)|)}{\ln(|z|)} < 1\,.$$

Para $\alpha > \beta$, la función $F_{\alpha,\varepsilon}$ crece más rápidamente que f cuando $z \in \mathbb{H}$ tiende a $\infty_\mathbb{C}$. Así que para $\alpha \in (\beta,1)$ y $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\limsup_{\substack{z \in \mathbb{H},\\ |z| \to \infty}} \frac{|f(z)|}{|F_{\alpha,\varepsilon}(z)|} = 0\,,$$

[4]¡Hay gente pá tó!

de donde como antes se deduce que

$$|f(z)| \leq 1 \,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H} \,.$$

La conclusión de esta discusión es ya es un teorema de corte Phragmén–Lindelöf que merece registrarse.

Teorema 2.10 *Sea f holomorfa en $\mathbb{H}$ y tal que*

- *para $M > 0$ se tiene que* $\limsup_{z\to w} |f(w)| \leq M$*, para todo* $w \in \partial\mathbb{H}$*,*
- [PL]: *para un cierto β tal que $0 \leq \beta < 1$ (y para $B > 0$) se cumple que*

$$|f(z)| \leq B e^{|z|^\beta} \,, \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{H} \,.$$

Entonces

$$|f(z)| \leq M \,, \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{H} \,.$$

Las dos condiciones de este teorema son de naturaleza diversa.

La primera es una condición de acotación del módulo en el *borde*, propia de un teorema del corte del principio de módulo máximo.

La segunda es una condición de *crecimiento en el infinito* que permite gestionar el obstáculo de que el dominio no es acotado o, si se prefiere, que la condición primera de acotación no abarca todos los puntos de la frontera en el plano extendido. Esta segunda condición es puramente una condición [PL], territorio Phragmén–Lindelöf.

Observe lector que la restricción $\beta < 1$ en la condición [PL] es necesaria, pues la función e^z cumple esta acotación cuando $\beta = 1$ en $\mathbb{H}$, está acotada en módulo por 1 en $\partial\mathbb{H}$, y, sin embargo, no está acotada sobre $\mathbb{H}$.

Repasemos, con afán conceptualizador, los puntos esenciales de esta **técnica de Phragmén–Lindelöf**. Tenemos un dominio Ω *simplemente conexo*, acotado o no, y un punto destacado p de su frontera o $\infty_{\mathbb{C}}$ si Ω es no acotado. Además disponemos de una función F holomorfa en Ω, que no se anula en ningún punto de Ω y tal que

- $\liminf\limits_{z\to w} |F(z)| \geq 1$, para cada $w \in \partial\Omega \setminus \{p\}$,
- $\lim\limits_{z\to p} |F(z)| = +\infty$.

Supongamos ahora que f es una función holomorfa en Ω acotada en módulo en su borde:

- $\limsup\limits_{z\to w} |f(z)| \leq M$, para cada $w \in \partial\Omega \setminus \{p\}$.

Consideremos la función $g = f/F$ holomorfa en Ω. Si la función f crece, si acaso, al acercarse a p, *más lentamente que F de manera que* $\lim_{z\to p} |g(z)| = 0$ (ésta es la condición [PL]), entonces se concluye que

$$(\star) \quad |f(z)| \leq M|F(z)| \,, \qquad \text{para todo } z \in \Omega.$$

La conclusión ($\star$) se obtiene en el caso en que Ω es acotado y p un punto cualquier de su borde aplicando el corolario 2.4 y en el caso Ω no acotado y $p = \infty_{\mathbb{C}}$, considerando componentes conexas de los abiertos auxiliares $\Omega \cap \mathbb{D}(0, R)$ para R que tiende a $+\infty$.

Si para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que F^ε es capaz de obliterar a la f dada, en el sentido de que $\lim_{z\to p} |f(z)|/|F(z)|^\varepsilon = 0$ entonces en lugar de ($\star$) se obtendría

$$|f(z)| \leq M|F(z)|^\varepsilon \,, \qquad \text{para todo } z \in \Omega \,.$$

Y ahora, sí, haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ se concluye que

$$|f(z)| \leq M \,, \qquad \text{para todo } z \in \Omega \,.$$

La hipótesis de conexión simple de Ω es la que permite escribir $F = \exp(h)$, donde h es una función holomorfa en todo Ω, y luego considerar $F^\varepsilon = \exp(\varepsilon h)$.

B. Sectores y bandas

Consideramos a continuación funciones f holomorfas definidas en *sectores o en bandas.*

La amplitud angular del sector y el ancho de la banda serán, como veremos, determinantes en la especificación de la condición Phragmén–Lindelöf sobre el crecimiento permitido a la función f cuando $z \to \infty_{\mathbb{C}}$.

Procedamos.

Para $\delta \in (0, \pi]$ sea $\mathbb{S}_\delta$ el sector

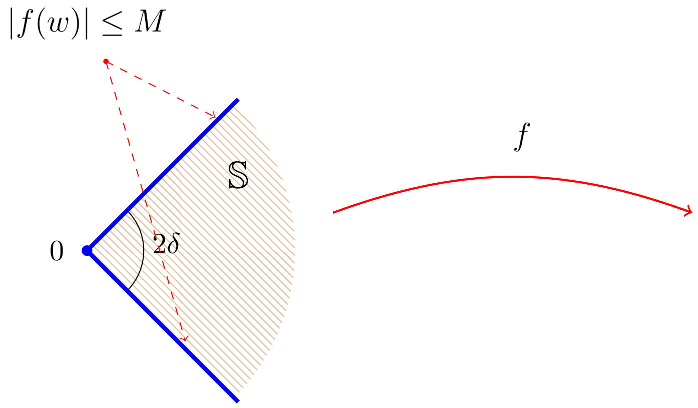
$$\mathbb{S}_\delta = \left\{ z = re^{\imath\vartheta} \in \mathbb{C};\ r > 0,\ |\vartheta| < \delta \right\}.$$

Para $\delta = \pi/2$, se tiene $\mathbb{S}_{\pi/2} = \mathbb{H}$, mientras que para $\delta = \pi$, se tiene que $\mathbb{S}_\pi = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, es decir, el plano complejo al que le hemos retirado el semieje real no positivo.

Supongamos que f es holomorfa en $\mathbb{S}_\delta$, y que es tal que, para un cierto $M > 0$, se cumple que

$$\limsup_{z\to w} |f(w)| \leq M \,, \qquad \text{para todo } w \in \partial\mathbb{S}_\delta \,,$$

o, simplemente, que f es además continua en $\mathrm{cl}(\mathbb{S}_\delta$ y $|f(w)| \leq M$, para todo $w \in \partial\mathbb{S}_\delta$.



Dibujo 2.1. Phragmén–Lindelöf, sectores.

¿Qué restricción sobre el crecimiento de la función f cuando $z \to \infty_{\mathbb{C}}$ es preciso imponer para poder concluir que $|f|$ está acotada por M en todo el sector $\mathbb{S}_\delta$? Podríamos remedar los argumentos del caso de $\mathbb{H}$, pero es más directo obtener, como vamos a presentar a continuación, la pertinente condición con un cambio de variables que nos traslade (a nosotros y sobre todo a f) de $\mathbb{S}_\delta$ a $\mathbb{H}$.

Fijemos $\delta \in (0, \pi]$ y denotemos $\Delta = (2/\pi)\delta$. La trasformación $\Psi(z) := z^\Delta$ lleva biholomorfamente el semiplano $\mathbb{H}$ sobre el sector $\mathbb{S}_\delta$. En cuanto a la acción de Ψ en el borde: si $\delta < \pi$, esta función Ψ es biyectiva entre $\partial\mathbb{H}$ y $\partial\mathbb{S}_\delta$, mientras que para $\delta = \pi$ la transformación Ψ es 2 a 1 desde $\partial\mathbb{H}$ sobre $\partial\mathbb{S}_\pi$.

Consideremos la función g holomorfa en $\mathbb{H}$ dada por $g(z) = f(z^\Delta)$, para todo $z \in \mathbb{H}$. Observe, lector, que

$$\limsup_{z\to w} |g(z)| \leq M\,, \qquad \text{para todo } w \in \partial\mathbb{H}\,.$$

La requerida condición de crecimiento para g del teorema 2.10 se traduce en la exigencia para f de que para un cierto $\beta < 1/\Delta$ se cumpla

$$|f(z)| \leq B e^{|z|^\beta}\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{S}_\delta\,.$$

Así que:

Teorema 2.11 *Sea $\delta \in (0, \pi]$. Sea f holomorfa en $\mathbb{S}_\delta$ tal que*

- *para cierto $M > 0$ se tiene que $\limsup_{z\to w} |f(w)| \leq M$, para todo $w \in \partial\,\mathbb{S}_\delta$,*
- [PL]: *para un cierto β tal que $0 \leq \beta < \pi/(2\delta)$ (y un $B > 0$) se cumple que $|f(z)| \leq B e^{|z|^\beta}$, para todo $z \in \mathbb{S}_\delta$.*

Entonces

$$|f(z)| \leq M\,, \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{S}_\delta\,.$$

Cuanto menor es δ, y más *estrecho* es el sector $\mathbb{S}_\delta$, menos exigente es la condición de crecimiento.

Consideremos ahora **la banda** (horizontal) $\mathbb{B}$ que consta de aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $-1 < \Im(z) < 1$.

La banda $\mathbb{B}$ tiene *dos* infinitos: uno cuando $\Re(z) \to +\infty$ y otro cuando $\Re(z) \to -\infty$. Así que vamos a estudiar primero la semibanda

$$\mathbb{B}^+ = \big\{z = x + \imath y \in \mathbb{C} : x > 0,\, |y| < 1\big\}\,.$$

Fieles y leales al espíritu de Phragmén–Lindelöf buscamos funciones F holomorfas en $\mathbb{B}^+$, que no se anulen en punto alguno de $\mathbb{B}^+$, que estén acotadas inferiormente (en módulo) por 1 en la frontera de $\mathbb{B}^+$ y cuyo módulo tienda a $+\infty$ asaz rápidamente cuando $z \in \mathbb{B}^+$ tienda a $\infty_\mathbb{C}$.

La función $z \mapsto \exp(\pi/2)z$ lleva la semibanda $\mathbb{B}^+$ biholomorfamente sobre $\mathbb{H} \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Sea $F(z)$ la función entera

$$F(z) = \exp\big(\exp\big((\pi/2)z\big)\big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

¡Sic!, una doble exponencial.

Para w en la frontera horizontal de $\mathbb{B}^+$ se tiene que $|F(w)| = 1$. Para $w = \imath y$, con $|y| \leq 1$, es decir, para w en la frontera vertical de $\mathbb{B}^+$, se tiene que

$$|F(w)| = \exp(\cos((\pi/2)y)) \geq 1,$$

pues $\cos((\pi/2)y) \geq 0$.

Como en los bordes horizontales se cumple que $|F| \equiv 1$, no podemos tener que $|F(z)| \to \infty$ cuando $z \in \mathbb{B}^+$ tiende a $\infty_\mathbb{C}$, así que modificamos F, de manera análoga a como hicimos en el caso de $\mathbb{H}$, e introducimos funciones F_α.

Para $\alpha \in (0, \pi/2)$, sea F_α la función entera

$$F_\alpha(z) = \exp\big(\exp(\alpha z)\big)\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Como para $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$|F_\alpha(z)| = \exp\big(\exp(\alpha x)\,\cos(\alpha y)\big)\,,$$

tenemos que $|F_\alpha(w)| \geq e^{\cos(\alpha)} \geq 1$, para $w \in \partial\mathbb{B}^+$, y además

$$|F_\alpha(z)| \geq \exp\big(\exp(\alpha\Re(z))\,\cos(\alpha)\big), \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{B}^+,$$

que tiende a infinito rápidamente cuando $\Re(z) \to +\infty$, pues $\cos(\alpha) > 0$.

Ya tenemos todos los ingredientes:

Proposición 2.12 *Sea f holomorfa en $\mathbb{B}^+$ tal que*

- *para $M > 0$ se cumple que* $\limsup_{z\to w} |f(w)| \leq M$*, para todo* $w \in \partial\mathbb{B}^+$*,*
- [PL]: *para un cierto β tal que $0 \leq \beta < \pi/2$ (y un $B > 0$) se cumple que*

$$|f(z)| \leq B \exp\big(\exp(\beta\,\Re(z))\big), \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{B}^+.$$

Entonces $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathbb{B}^+$.

Para verificar esta proposición 2.12 basta tomar $\alpha \in (\beta, \pi/2)$ y $\varepsilon > 0$, aplicar el principio del módulo máximo a la función $f/(F_\alpha)^\varepsilon$ holomorfa en el dominio

$$\big\{z = x + \imath y \in \mathbb{C};\, 0 < x < X,\, |y| < 1\big\}$$

para X grande, y hacer $X \uparrow +\infty$ para concluir que

$$|f(z)| \leq M|F_\alpha(z)|^\varepsilon\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{B}^+\,.$$

Para finalmente, con z fijo hacer $\varepsilon \downarrow 0$ y deducir que, en efecto, $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathbb{B}^+$.

Para la banda completa $\mathbb{B}$, en lugar de la semibanda $\mathbb{B}^+$, usamos como funciones de compensación a las funciones enteras F_α dadas por

$$F_\alpha(z) = \exp\big(\alpha\cosh(z)\big) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Como para $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$|F_\alpha(z)| = \exp\big(\cosh(\alpha x)\cos(\alpha y)\big)\,,$$

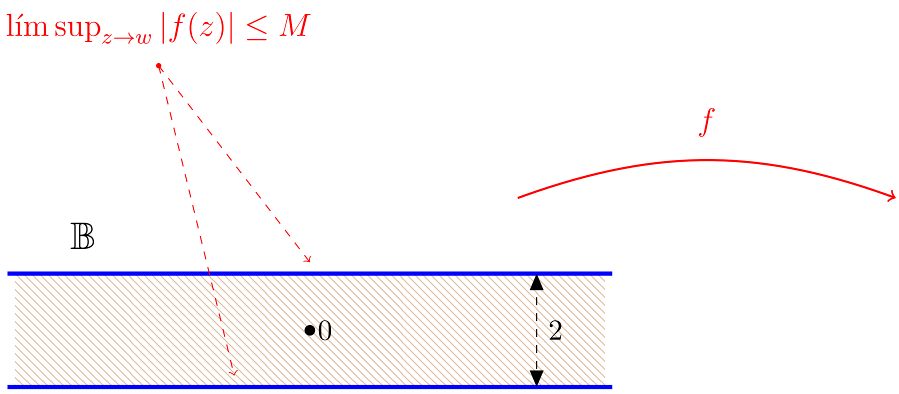
vemos que $|F_\alpha(z)| \to \infty$ tanto cuando $\Re(z) \to +\infty$ como cuando $\Re(z) \to -\infty$ y argumentando como en el caso que acabamos de discutir de la semibanda, pero aplicando el principio del módulo máximo en las subbandas $\{z = x + \imath y \in \mathbb{C};\, |x| < X, |y| < 1\}$, se concluye que:

Teorema 2.13 *Sea f holomorfa en $\mathbb{B}$ tal que*

- *para $M > 0$ se cumple que* $\limsup_{z\to w} |f(z)| \leq M$*, para todo* $w \in \partial\mathbb{B}$*,*
- [PL]: *para un cierto β tal que $0 \leq \beta < \pi/2$ se cumple que*

$$|f(z)| \leq B \exp\big(\exp(\beta\,|\Re(z)|)\big), \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{B}.$$

Entonces $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathbb{B}$.



Dibujo 2.2. PHRAGMÉN–LINDELÖF, BANDAS.

Quizás, paciente lector, convenga por completitud mencionar que para una banda

$$\mathbb{B}_a = \big\{z \in \mathbb{C}; |\Im(z)| < a\big\}\,,$$

donde $a > 0$, la condición de crecimiento requerida para obtener acotación ha de ser que para un cierto $\beta < (2/\pi)/a$ se cumpla que

$$|f(z)| \le B\exp\big(\exp(\beta\,|\Re(z)|)\big)\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{B},$$

para una cierta constante B.

Registramos a continuación un caso particular del teorema 2.13 para mejor referencia ulterior, pues apelaremos a él en algunas ocasiones.

Corolario 2.14 *Sea f un función holomorfa en una banda $\mathbb{B}_a$ donde $a > 0$. Supongamos que para $M > 0$*

$$\limsup_{z\to w}|f(z)| \le M\,, \qquad \textit{para todo } w \in \partial\mathbb{B}_a\,.$$

Supongamos adicionalmente que f esta acotada sobre todo $\mathbb{B}_a$, entonces

$$|f(z)| \le M \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{B}_a\,.$$

Este corolario se sigue de que si $|f|$ está acotada, entonces sea cual sea el ancho de la banda $a > 0$, la función f cumple la condición de crecimiento [PL] del teorema 2.13.

2.2.2. Más ejemplos del método de Phragmén–Lindelöf

Vamos a aplicar el método de Phragmén–Lindelöf en algunas situaciones concretas y hasta peculiares que van más allá de los específicos sectores y bandas.

A. Un principio del módulo máximo «modestamente universal» para dominios no acotados

Pongamos en lo que sigue que Ω es un dominio (en general) no acotado, *sobre el que no imponemos restricción alguna*, y que f es una función holomorfa en Ω tal que

$$\limsup_{z\to w} |f(w)| \le M\,, \quad \text{para todo } w \in \partial\Omega\,.$$

El objetivo de este apartado es comprobar que con *cierta condición adicional* sobre el crecimiento de la función f entonces $|f(z)| \le M$ para todo $z \in \Omega$.

A la vista del tropel de resultados Phragmén–Lindelöf de condiciones [PL] de crecimiento de f en dominios concretos, si queremos, como es el caso, un resultado «universal», es decir, que no dependa del dominio concreto Ω, la condición de crecimientos obre f habrá de ser bien restrictiva. Y a fe que lo es.

He aquí el teorema: un principio del módulo máximo «universal» para dominios no acotados:

Teorema 2.15 *Sea Ω un dominio no acotado y f una función holomorfa en Ω tal que para $M > 0$*

- $\limsup_{z\to w} |f(z)| \le M$*, para todo* $w \in \partial\Omega$*,*
- [PL]: $\limsup_{z\to\infty_{\mathbb{C}}} |f(z)| < +\infty$.

Entonces

$$|f(z)| \le M\,, \quad \textit{para todo } z \in \Omega\,.$$

La condición [PL] del enunciado equivale a suponer que $|f|$ está acotado en todo Ω. Desde luego, si $|f|$ está acotado entonces se tiene [PL]. Si se tiene [PL] y $|f|$ no estuviera acotada existiría una sucesión $(z_n)_{n\ge1}$ de puntos de Ω donde $|f(z_n)| \ge n$, para cada $n \ge 1$. La sucesión $(z_n)_{n\ge1}$ no se puede acumular en $\partial\Omega$ pues $\limsup_{z\to w} |f(z)| \le M$, para todo $w \in \partial\Omega$, ni en $\infty_{\mathbb{C}}$ por la condición [PL], ni en Ω pues f es holomorfa en Ω.

Observe lector que el corolario 2.14 aparece ahora como caso particular del presente teorema 2.15.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $\mathbb{D} \cap \Omega = \emptyset$. Luego veremos cómo desembarazarnos de esta restricción técnica.

En este caso en que $\mathbb{D}\cap\Omega = \emptyset$, la función $f(z)/z$ es holomorfa en Ω y, en general, para entero $k \ge 1$, la función $g_k(z) \triangleq f(z)^k/z$ es holomorfa en Ω.

Pongamos que $\limsup_{z\to\infty_{\mathbb{C}}} |f(z)| = S$. Y sea R_0 tal que ($\sharp$) $|f(z)| \le 2S$ para todo $z \in \Omega$ tal que $|z| \ge R_0$.

Fijemos $z_0 \in \Omega$ arbitrario. Vamos a verificar que $|f(z_0)| \le M$. Fijemos $k \ge 1$ y además R tal que $R > R_0$ y $R > |z_0|$. Sea Ω_R la componente de $\Omega \cap \mathbb{D}(0, R)$ que contiene a z_0.

Vamos a aplicar seguidamente el corolario 2.4 a la función g_k en el dominio Ω_R. Partimos $\partial\Omega_R$ en $\alpha = \partial\Omega_R \cap \partial\mathbb{D}(0,R)$ y $\beta = \partial\Omega_R \setminus \alpha$. Observe lector que $\beta \subset \partial\Omega$.

Como $\mathbb{D} \cap \Omega = \emptyset$, se tiene que

$$\limsup_{z\in\Omega_R; z\to w} |g_k(z)| \le M^k\,, \quad \text{para todo } w \in \beta\,.$$

Además, por ($\sharp$) y como $R > R_0$, se tiene

$$\limsup_{z\in\Omega_R; z\to w} |g_k(z)| \le (2S)^k/R\,, \quad \text{para todo } w \in \alpha\,.$$

El corolario 2.4 nos da en particular que

$$|g_k(z_0)| \le \text{máx}\big(M^k, (2S)^k/R\big)\,, \quad \text{para todo } R < \text{máx}(R_0, |z_0|)\,.$$

Liberando R y haciendo $R \to \infty$, se deduce que

$$|g_k(z_0)| \le M^k\,, \quad \text{para todo } k \ge 1\,,$$

es decir,

$$|f(z_0)| \le M|z_0|^{1/k}\,, \quad \text{para todo } k \ge 1\,.$$

Ahora, liberando k y permitiendo $k \uparrow \infty$, obtenemos como queríamos $|f(z_0)| \le M$.

Ya tenemos el resultado del enunciado bajo la hipótesis adicional de que $\mathbb{D}\cap\Omega = \emptyset$. En la situación general, fijemos $z_0 \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Una traslación y una dilatación nos permiten suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in \partial\Omega$, que $|f(z)| \le M + \varepsilon$ si $z \in \mathbb{D}$ y que $|z_0| > 1$. Sea $\widetilde{\Omega}$ la componente de $\Omega \cap \{|z| > 1\}$ que contiene a z_0. Si $\widetilde{\Omega}$ es no acotado, el resultado ya obtenido nos da $|f(z_0)| \le M + \varepsilon$, y haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ se deduce $|f(z_0)| \le M$. Si $\widetilde{\Omega}$ fuera acotado, basta aplicar el corolario 2.4 para concluir igualmente que $|f(z_0)| \le M + \varepsilon$. ■

B. Cotas no acotadas

El siguiente lema 2.16 de conspicuo enunciado y cuya verificación desarrollamos discursivamente antes de formular su enunciado, equivale al lema 9.32 que será clave en la demostración del teorema tauberiano de Fatou, teorema 9.54, o mejor, del teorema de Fatou, teorema 9.31, sobre series de potencias.

De este lema interesa tanto la técnica, una muestra más del método de Phragmén–Lindelöf, como la conclusión tan específica.

Sea $\mathbb{K}$ el cuadrado[5] unidad:

$$\mathbb{K} = \{z = x + \imath y; |x| < 1, |y| < 1\}\,.$$

¿Cómo, el cuadrado unidad? Esto es nuevo, dirá el lector. No se preocupe, le decimos, es tan sólo una normalización; aquí la técnica y el método, y no la forma o el tamaño, son lo que importa.

[5] ¿kuadrado?

Supongamos que f es holomorfa en $\mathbb{K}$ y que disponemos tan sólo de la acotación siguiente:

$$|f(z)| \le \frac{M}{|\Im(z)|}\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{K}\,. \tag{2.1}$$

Observe, lector, que si $z = x \in (-1,1) \subset \mathbb{K}$ entonces $|f(z)|$ es finito, claro, pero que, sin embargo, la cota (2.1) se hace infinita. En el borde de $\mathbb{K}$ la acotación controla con qué velocidad $|f|$ se puede ir a ∞ cuando nos aproximamos a 1 o a -1 verticalmente, sobre el borde.

Consideremos la función

$$F(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1}{1-z^2}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}\,.$$

Esta función F es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en ± 1, y holomorfa y no nula sobre todo $\mathbb{K}$.

En todo $\mathrm{cl}(\mathbb{K})$ se tiene que

$$|F(z)| \le \frac{1}{|\Im(z)|}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{K})\,.$$

Para verificarlo, observe, lector, que basta, por simetría, comprobarlo si $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{K})$ con $\Re(z) \ge 0$, pero entonces se tiene que que $|1-z||1+z| \ge |1-z| \ge |\Im(z)|$.

Así que esta función F particular cumple la condición (2.1) con $M = 1$.

Además, en $\partial\mathbb{K}$ se tiene

$$|F(w)| \ge \frac{1}{\sqrt{5}\,|\Im(w)|}\,, \quad \text{para todo } w \in \partial\mathbb{K}\,,$$

porque si w pertenece a los segmentos horizontales de $\partial\mathbb{K}$ se tiene que

$$|1-w||1+w| \le 2 = 2|\Im(z)|\,,$$

mientras que si w pertenece a los segmentos verticales de $\partial\mathbb{K}$ entonces

$$|1-w||1+w| \le \sqrt{5}|\Im(z)|\,.$$

Enunciamos ya el lema anunciado.

Lema 2.16 *Se f una función holomorfa en $\mathbb{K}$ tal que*

$$|f(z)| \le \frac{M}{|\Im(z)|}\,, \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{K}\,,$$

entonces

$$|f(0)| \le \sqrt{5}\,M\,.$$

De hecho,

$$|f(z)| \le \frac{\sqrt{5}\,M}{|1-z^2|}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{K}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $t \in (0,1)$ La función $z \mapsto f(tz)$ es holomorfa en $\mathbb{K}$, continua hasta su borde y verifica la acotación (2.1) con M/t en lugar de M, así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que la propia f es continua hasta $\partial\mathbb{K}$.

En puro espíritu Phragmén–Lindelöf consideramos ahora la función $g = f/F$, que es holomorfa en $\mathbb{K}$ y continua hasta su borde, donde se anula en $z = \pm 1$.

Para $w \in \partial\mathbb{K}$ se cumple la acotación

$$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{|F(w)|} \le \frac{M}{|\Im(w)|}\sqrt{5}|\Im(w)| = \sqrt{5}\,M\,.$$

Por el principio del módulo máximo en la versión del teorema 2.3 concluimos que

$$|g(z)| \le \sqrt{5}\,M\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{K}\,,$$

es decir,

$$|f(z)| \le \frac{\sqrt{5}\,M}{|1-z^2|}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{K}\,,$$

y, en particular, que

$$|f(0)| \le \sqrt{5}\,M\,.$$

■

Analizamos a continuación el papel de la hipótesis (2.1). Supongamos que

$$(\dagger_\alpha) \quad |f(z)| \le \frac{M}{|\Im(z)|^\alpha}\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{K}\,,$$

donde α es un cierto exponente $\alpha > 0$. ¿Podemos obtener una buena acotación de $|f(0)|$? Como en todo $\mathbb{K}$ se tiene que $|\Im(z)| \le 1$, el caso $\alpha \le 1$ es una instancia particular del lema 2.16, y obtendríamos en ese caso ($\alpha \le 1$) la misma acotación $|f(0)| \le \sqrt{5}\,M$. Para $\alpha > 1$, la hipótesis $(\dagger_\alpha)$ es más débil.

Pero argumentemos en general con $\alpha > 0$. Replicando el argumento de la prueba del lema 2.16 pero usando en lugar de F la función holomorfa F^α holomorfa en $\mathbb{K}$ con $F^\alpha(0) = 1$ (donde usamos que F no se anula en $\mathbb{K}$ y la conectividad simple de $\mathbb{K}$), se obtiene que

$$|f(0)| \le M\sqrt{5}^\alpha \quad \text{y} \quad |f(z)| \le \frac{M\,\sqrt{5}^\alpha}{|1-z^2|^\alpha}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{K}\,.$$

De manera que para cualquier $\alpha > 0$ se obtendría una conclusión análoga a la del caso $\alpha = 1$.

☞ **Nota** 2.2.1. ☜ Para $\alpha < 1$ podemos argumentar alternativamente usando la fórmula de Cauchy. Supongamos f es continua en $T\mathbb{K}$ con $T > 1$. (Al tomar $f(z/T)$ la constante de la cota en $(\dagger_\alpha)$ sería MT^α y luego haríamos tender $T \downarrow 1$.) La fórmula de Cauchy da que

$$|f(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{K}} \frac{|f(w)|}{|w|}\,|dw| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{K}} |f(w)|\,|dw| \le \frac{4\,M}{2\pi}\Big(1 + \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha}\Big) = \frac{2M}{\pi}\Big(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\Big)\,,$$

donde hemos usando que $|w| \ge 1$ si $w \in \partial\mathbb{K}$.

Esta es una cota universal, pero que explota si hacemos $\alpha \uparrow 1$. El exponente $\alpha = 1$ es pues crítico. Sirva esta comentario de piedra de toque para comparar la acotación de Cauchy con el método de Phragmén–Lindelöf. ♠

C. Teoremas de Lindelöf

Vamos ahora a usar el método de Phragmén–Lindelöf para analizar ciertas cuestiones de comportamiento frontera de funciones holomorfas *acotadas* en el disco unidad $\mathbb{D}$.

Proposición 2.17 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y acotada en módulo. Supongamos que f es continua en $\operatorname{cl}(\mathbb{D}) \setminus \{1\}$ y que $\lim_{\vartheta \to 0} f(e^{\imath\vartheta}) = \alpha \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$\lim_{z \in \mathbb{D}; z \to 1} f(z) = \alpha\,.$$

La hipótesis nos da información sobre cómo f se comporta en la frontera $\partial\mathbb{D}$ y la conclusión nos dice cómo f se comporta en el interior $\mathbb{D}$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, y suponemos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha = 0$ y que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

El objetivo es probar que

$$(\ddagger) \qquad \limsup_{\substack{z \to 1;\\ z \in \mathbb{D}}} |f(z)| = 0\,.$$

Vamos con ello. Para cada $\delta > 0$, denotemos por Ω_δ al dominio

$$\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{D} : |1 - z| < \delta\} = \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, \delta)\,,$$

y sea

$$\eta(\delta) = \sup\{|f(w)| : w \in \partial\mathbb{D};\ 0 < |1 - w| \le \delta\}\,.$$

Por hipótesis, $\lim_{\delta \downarrow 0} \eta(\delta) = 0$.

Vamos a aplicar el principio del máximo a f en Ω_δ.

Nos ponemos en modo Phragmén–Lindelöf: ayudándonos de funciones auxiliares que permitan aprovechar la información de que $|f|$ es pequeño cerca de $w = 1$ y que nos permitan a su vez controlar la aproximación hacia $w = 1$.

Fijemos $K > 0$ y consideremos la función holomorfa en $\mathbb{D}$ dada por

$$g_K(z) = f(z) e^{K\,(z-1)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}$$

Observe, lector, que

$$|g_K(z)| = |f(z)| e^{K(\Re(z)-1)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

y que, por tanto,

$$\limsup_{\substack{z \to 1;\\ z \in \mathbb{D}}} |g_K(z)| = \limsup_{\substack{z \to 1;\\ z \in \mathbb{D}}} |f(z)|$$

Analicemos el comportamiento de g_K en la frontera de Ω_δ.

Si $w \in \partial\Omega_\delta \cap \mathbb{D}$, entonces $\Re(w) \le 1 - (\delta^2/2)$ y, por tanto,

$$(\star_1) \qquad |g_K(w)| \le e^{-K(\delta^2/2)}\,.$$

Si $w \in \partial\Omega_\delta \cap \partial\mathbb{D}$ y $w \neq 1$, entonces

$$(\star_2) \qquad |g_K(w)| \le \eta(\delta)\,.$$

Sí, lector, falta el punto $w = 1$. Pero, hagamos, lector, caso omiso, por un momento, de esta carencia. Si pudiéramos aplicar el principio del módulo máximo a g_K en Ω_δ (obviando, sí, que no tenemos cota en 1) tendríamos que

$$|g_K(z)| \le e^{-K(\delta^2/2)} + \eta(\delta)\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega_\delta\,,$$

y, por tanto, tendríamos que

$$\limsup_{\substack{z\to 1;\\ z\in\mathbb{D}}} |f(z)| = \limsup_{\substack{z\to 1;\\ z\in\mathbb{D}}} |g_K(z)| \le e^{-K(\delta^2/2)} + \eta(\delta)\,.$$

Si tomáramos $K = 1/\delta^4$ e hiciéramos $\delta \downarrow 0$, deduciríamos el resultado (‡).

Pero nos falta el punto $w = 1$. De nuevo, más funciones auxiliares Phragmén–Lindelöf. Para $\gamma > 0$ (y $K > 0$ como hasta ahora), consideremos la función holomorfa en $\mathbb{D}$ dada por

$$h_{K,\gamma}(z) = g_K(z)\exp\big(-\gamma U(z)\big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

donde

$$U(z) = \Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)^{1/2}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Como $z \longmapsto \frac{1+z}{1-z}$ lleva $\mathbb{D}$ en $\mathbb{H}$, la función U lleva $\mathbb{D}$ en el ángulo $|\arg(z)| < \pi/4$, y tenemos que

$$|h_{K,\gamma}(z)| \le |g_K(z)|\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

De manera que las cotas $(\star_1)$ y $(\star_2)$ se siguen manteniendo para $h_{K,\gamma}$. Pero ahora para el punto $w = 1$, que restaba por domar, acotamos como sigue:

$$|h_{K,\gamma}(z)| = |f(z)|\exp\big(K(\Re(z)-1)\big)\exp\big(-\gamma\Re(U(z))\big) \le \exp\big(-\gamma\Re(U(z))\big)\,,$$

pues $|f(z)|$ está acotado por 1 y $\Re(z) \le 1$, para $z \in \mathbb{D}$. Pero ahora, cuando $z \to 1$ tenemos que $\Re(U(z)) \to +\infty$ la cota anterior tiende a 0 (ese es el papel, muy Phragmén–Lindelöf del exponente 1/2; valdría cualquier exponente < 1).

En conclusión, con el argumento que antes hemos detenido porque faltaba información en $w = 1$, ahora si podemos concluir que

$$|h_{K,\gamma}(z)| \le e^{-K(\delta^2/2)} + \eta(\delta)\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega_\delta\,.$$

Si mantenemos $z \in \Omega_\delta$ fijo y hacemos $\gamma \downarrow 0$ obtenemos que

$$|g_K(z)| \le e^{-K(\delta^2/2)} + \eta(\delta)\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega_\delta\,,$$

y, con esto, como ya indicábamos antes, concluimos (‡). ■

Como corolario de la proposición 2.17 tenemos el siguiente complemento.

Corolario 2.18 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y acotada en módulo. Supongamos que f es continua en* $\mathrm{cl}(\mathbb{D}) \setminus \{1\}$ *y que*

$$\lim_{\vartheta \downarrow 0} f(e^{\imath\vartheta}) = \alpha \in \mathbb{C} \qquad y \qquad \lim_{\vartheta \uparrow 0} f(e^{\imath\vartheta}) = \beta \in \mathbb{C}\,.$$

Entonces estos dos límites laterales *coinciden: $\alpha = \beta$.*

Una vez que sabemos que estos límites coinciden entonces ya estamos en la situación de la proposición 2.17 y $f(z)$ converge hacia ese valor común $\alpha = \beta$ cuando $z \in \mathbb{D}$ tiende a 1.

DEMOSTRACIÓN. Si no fuera $\alpha = \beta$, con una transformación lineal, si fuera preciso, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha = 1$ y que $\beta = -1$. Buscamos, claro, una contradicción.

Consideremos la función g dada por

$$g(z) = f^2(z)\,.$$

La función g es holomorfa en $\mathbb{D}$ continua en $\mathrm{cl}(\mathbb{D}) \setminus \{1\}$ y está en la situación de la proposición 2.17. Así que

$$\lim_{\substack{z \in \mathbb{D};\\ z \to 1}} g(z) = 1\,.$$

Tomando, por ejemplo $\varepsilon = 1/4$, podemos elegir $\delta > 0$ tal que en $\Omega_\delta = \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, \delta)$ se cumple que

$$|f(z) - 1||f(z) + 1| = |g(z) - 1| \le (1/4)\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega_\delta\,.$$

Entonces $f(\Omega_\delta) \subset \mathbb{D}(-1, 1/2) \cup \mathbb{D}(1, 1/2)$. Como $f(\Omega_\delta)$ es conexo, se tiene que

$$f(\Omega_\delta) \subset \mathbb{D}(-1, 1/2) \quad \text{o} \quad f(\Omega_\delta) \subset \mathbb{D}(1, 1/2)\,.$$

Las dos alternativas son imposibles, porque $f(\Omega_\delta) \subset \mathbb{D}(-1, 1/2)$ contradice que $\lim_{\vartheta \downarrow 0} f(e^{\imath\vartheta}) = \alpha = 1$ y $f(\Omega_\delta) \subset \mathbb{D}(1, 1/2)$ contradice que $\lim_{\vartheta \uparrow 0} f(e^{\imath\vartheta}) = \beta = -1$. ■

Teorema 2.19 (Teorema de Lindelöf) *Sea f holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ y acotada en módulo y sea $\gamma(t) : t \in [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$ una curva continua.*

Supongamos que $\gamma[0, 1) \subset \mathbb{D}$ y que $\gamma(1) = 1$ y además que

$$\lim_{t \to 1} f(\gamma(t)) = a \in \mathbb{C}.$$

Entonces, $\lim_{r \uparrow 1} f(r) = a$.

Así que si f tiene límite $a \in \mathbb{C}$ a lo largo de una cierta curva continua, se deduce que f tiene límite a a lo largo del radio desde $z = 0$ hasta $z = 1$. Por tanto, f sólo puede tener un límite a lo largo de curvas continuas que tienden a 1. Y a la contra, si f holomorfa en $\mathbb{D}$ tuviera límite a a lo largo de γ y límite b a lo largo de ω, y $a \neq b$, entonces ... $|f|$ no está acotada.

El teorema 2.19 de Lindelöf se deduce clásicamente de la proposición 2.17 con un argumento de aplicación conforme y extensión continua a la frontera que no, no, señor, no vamos a discutir ahora.

2.2.3. Teoremas de las 3 rectas y de los 3 círculos

Eufónico y sugerente apelativo, casi de reclamo publicitario, para esta colección de elegantes teoremas que tradicionalmente se atribuyen a Jacques (Salomon) Hadamard.

Vamos primero con el **teorema de las 3 rectas**, también llamado **teorema de las 3 líneas**.

Para $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, consideremos la *banda vertical*

$$\mathbb{V}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C}; a < \Re(z) < b\} .$$

Sí, lector, usaremos aquí banda verticales, en lugar de las horizontales, por cierta conveniencia notacional.

Supongamos que f es una función holomorfa en $\mathbb{V}_{a,b}$ tal que su módulo $|f|$ está acotado. Para cada $x \in (a, b)$, denotamos

$$L(f, x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(x + \imath\, y)| ,$$

que es, para cada $x \in (a, b)$, una cantidad finita.

Por hipótesis, $|f|$ está acotada en toda la banda $\mathbb{V}_{a,b}$, de manera que el corolario 2.14 del teorema de Phragmén–Lindelöf para bandas nos dice que si s, t son tales que $a < s < t < b$ entonces

$$(\star) \quad L(f, x) \leq \max\big(L(f, s),\ L(f, t)\big) .$$

El teorema de las 3 rectas precisa elocuentemente esta estimación.

Teorema 2.20 (Teorema de las 3 rectas de Hadamard) *Sea f holomorfa en $\mathbb{V}_{a,b}$ y con módulo $|f|$ acotado sobre toda la banda $\mathbb{V}_{a,b}$. Si $a < s < t < b$, entonces para $s \leq x \leq t$ se cumple que*

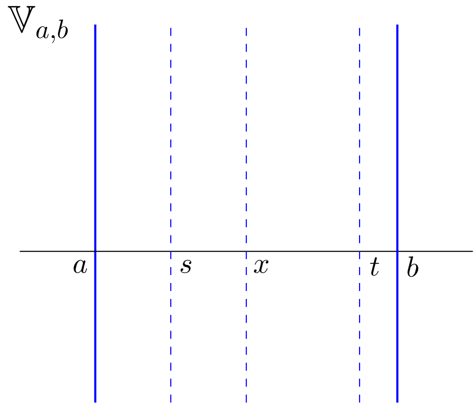
$$L(f, x) \leq L(f, s)^{(t-x)/(t-s)}\, L(f, t)^{(x-s)/(t-s)}.$$

En otros términos,

$$\ln L(f, x) \leq \Big(\frac{t-x}{t-s}\Big) \ln L(f, s) + \Big(\frac{x-s}{t-s}\Big) L(f, t) .$$

Es decir,

$$x \in (a, b) \mapsto \ln L(f, x) \quad \textit{es una función convexa} .$$



Dibujo 2.3. Teorema de 3 rectas.

demostración. Para $s < t$ del enunciado fijos, consideremos la siguiente función entera auxiliar F dada por

$$F(z) = L(f,s)^{(t-z)/(t-s)}\, L(f,t)^{(z-s)/(t-s)}\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Obsérvese que si $z = x + \imath y$, entonces

$$(\star) \quad |F(z)| = L(f,s)^{(t-x)/(t-s)}\, L(f,t)^{(x-s)/(t-s)}\,.$$

Así que,

$$L(F,s) = L(f,s) \quad \text{y} \quad L(F,t) = L(f,t)\,,$$

y, además, para $s \le x \le t$,

$$\begin{aligned}\ln L(F,x) &= \Big(\frac{t-x}{t-s}\Big) \ln L(f,s) + \Big(\frac{x-s}{t-s}\Big) L(f,t)\\ &= \Big(\frac{t-x}{t-s}\Big) \ln L(F,s) + \Big(\frac{x-s}{t-s}\Big) L(F,t).\end{aligned}$$

En otros términos, la función $x \longmapsto \ln L(F,x)$ es una función lineal.

La convexidad buscada equivale justamente a verificar que

$$\ln L(f,x) \le \ln L(F,x)\,, \qquad \text{para } s \le x \le t\,.$$

Este es el significado de la convexidad: la gráfica de $\ln L(f,x)$ está situada por debajo de la gráfica de la secante (lineal) $\ln L(F,x)$.

Vamos con ello. Consideremos, en modo Phragmén–Lindelöf, la función $h(z) = f(z)/F(z)$. Esta función h es holomorfa en $\mathbb{V}_{a,b}$. De $(\star)$ se deduce que

$$|F(z)| \ge \min\big(L(f,s), L(f,t)\big)\,, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } s \le \Re(z) \le t\,,$$

de donde se concluye, por consiguiente, que el módulo $|h|$ de h está acotada en el rango de z tales que $s \leq \Re(z) \leq t$.

Además, $|h(w)| \leq 1$ si $\Re(w) = t$ o si $\Re(w) = s$.

Por el corolario 2.14 del teorema de Phragmén-Lindelöf para bandas, concluimos que

$$|h(z)| \leq 1\,, \quad \text{si } s \leq \Re(z) \leq t\,.$$

Traduciendo a f y F, tenemos que

$$|f(z)| \leq |F(z)|\,, \quad \text{si } s \leq \Re(z) \leq t\,,$$

y, por tanto, que

$$L(f, x) \leq L(F, x)\,, \quad \text{si } s \leq x \leq t\,,$$

y, finalmente, como queríamos comprobar, que

$$\ln L(f, x) \leq \ln L(F, x)\,, \quad \text{si } s \leq x \leq t\,. \qquad \blacksquare$$

Pasamos ahora a la versión en anillos del teorema de las 3 rectas: **teorema de los 3 círculos**.

Fijemos $0 < a < b < +\infty$ y el anillo $\mathbb{A}(a, b)$ dado por

$$\mathbb{A}(a, b) = \big\{z \in \mathbb{C} : \, a < |z| < b\big\}\,.$$

Supongamos que f es una función holomorfa en $\mathbb{A}(a, b)$. Para cada $r \in (a, b)$, denotamos $M(f, r) = \max\{|f(z)|; |z| = r\}$ el máximo de $|f|$ sobre la circunferencia $|z| = r$. La función $r \in (a, b) \mapsto M(f, r)$ es una función continua.

Si supiéramos que f es holomorfa en $\mathbb{D}(0, b)$ entonces tendríamos que $M(f, r)$ sería una función creciente de r. Pero este crecimiento no ocurre en general en anillos; por ejemplo, si $f(z) = 1/z$, entonces $M(f, r) = 1/r$, para cada $r \in (a, b)$.

El principio del módulo máximo aplicado a $\Omega = \{z; \, r < |z| < t\}$ nos dice, sin embargo, que

$$M(f, s) \leq \max\{M(f, r), M(f, t)\}\,, \quad \text{si } a < r \leq s \leq t < b\,.$$

Pero, de hecho, se tiene:

Teorema 2.21 (Teorema de los 3 círculos de Hadamard) *Sea f una función holomorfa en el anillo $\mathbb{A}_{a,b}$, con $a < b$. Si $a < r \leq s \leq t < b$, entonces*

$$M(f, s)^{\ln(t/r)} \leq M(f, r)^{\ln(t/s)}\, M(f, t)^{\ln(s/r)}\,.$$

O, mejor,

$$\ln M(f, s) \leq \frac{\ln(t) - \ln(s)}{\ln(t) - \ln(r)} \ln M(f, r) + \frac{\ln(s) - \ln(r)}{\ln(t) - \ln(r)} \ln M(f, t)\,.$$

En otros términos, $\ln M(f, r)$ es una función convexa de $\ln(r)$, para $r \in (a, b)$.

☞ **Nota** 2.2.2. ☜ Sobre terminología. Una función real u, definida en $(0,+\infty)$, es función convexa de $\ln(r)$ si para una cierta función real convexa U definida en $\mathbb{R}$ se cumple que $u(r) = U(\ln(r))$, o en otros términos, sin apelar a U, si la función $t \longmapsto u(e^t)$ es convexa. ♠

DEMOSTRACIÓN. Este teorema se deduce enseguida del teorema de las 3 rectas. Sea g la función holomorfa en la banda horizontal $\mathbb{B}_{\ln(a),\ln(b)}$ dada por

$$g(z) = f\big(e^z\big)\,.$$

Obsérvese que

$$L(g,x) = M(f,e^x)\,, \quad \text{para } \ln(a) < x < \ln(b)\,,$$

es decir,

$$M(f,r) = L(g,\ln(r))\,, \quad \text{para } a < r < b.$$

Como por el teorema de las 3 rectas $L(g,x)$ es una función convexa de x, concluimos, como queríamos que $M(f,r)$ es función convexa de $\ln(r)$. ■

2.2.4. Convexidad de normas y espacios de Lebesgue

Vamos a escudriñar ahora con ojos 3 rectasç[6] ciertos resultados sobre convexidad de normas en espacios L^p, entre los que se incluye la desigualdad de Hölder y el teorema de interpolación de Riesz–Thorin. Perdón, ¿desigualdad de Hölder?, ¿pero eso no corresponde a teoría de la medida, o a variable real, o a análisis funcional. . . ?, se estará preguntado el lector, con cierta alarma. ¡No toca!, clamará enfáticamente. Pues sí, y esa es la gracia, le respondemos.

Consideramos un espacio de probabilidad (X,μ) y los distintos espacios $L^p = L^p(X,\mu)$ asociados con $p > 0$. Por ahora, sí, $p > 0$, aunque luego, será $p > 1$.

A. Convexidad de normas L^p (como función de p)

Fijemos una función medible h *no negativa* y tomemos tres exponentes positivos r,s,t tales que $0 < r < s < t < +\infty$.

Supongamos que $h \in L^r$ y que $h \in L^t$. Escribamos el exponente intermedio $s \in (r,t)$ como combinación convexa de r y t :

$$s = (1-\lambda)r + \lambda t\,,$$

para $\lambda \in (0,1)$. (Claro que $\lambda = (s-r)/(t-r)$.) Tomemos $p = 1/(1-\lambda)$ y $q = 1/\lambda$. Obsérvese que $p,q > 1$ y que $1/p + 1/q = 1$.

Escribamos $h^s = h^{(1-\lambda)r}h^{\lambda t}$ y apliquemos la desigualdad de Hölder con el par de exponentes conjugados p,q para obtener

$$\int_X h(x)^s\,d\mu(x) \le \Big(\int_X h(x)^r\,d\mu(x)\Big)^{(1-\lambda)}\,\Big(\int_X h(x)^t\,d\mu(x)\Big)^{\lambda}\,,$$

[6] ¡Como para marear!

y para concluir, entonces, al tomar logaritmos, que la función

$$s \in (0, +\infty) \longmapsto \ln\Big(\int_X h(x)^s \, d\mu(x)\Big) \quad \text{es } \textit{convexa}.$$

Veamos cómo derivar esta propiedad de convexidad usando el teorema de las 3 rectas. Parece, lector, un abuso de fuerza, un potente teorema (de derivación no tan simple) como el de las 3 rectas para concluir un resultado que podríamos catalogar como básico. Pero, persevere, lector, que a veces la constancia, incluso la ciega, se ve recompensada.

Vamos a suponer que h es una función simple no negativa; el resultado general se seguiría por el teorema de la convergencia monótona.

Sea $h = \sum_{j=1}^n \alpha_j \, \mathbf{1}_{A_j}$, con $\alpha_j > 0$ y A_j disjuntos a pares y $\sum_{j=1}^n \mu(A_j) < \infty$. Pongamos $p_j = \mu(A_j)$, para $1 \le j \le n$. Obsérvese que

$$\int_X h(x)^s \, d\mu(x) = \sum_{j=1}^n p_j \, \alpha_j^s := \varphi(s)\,, \qquad \text{para todo } s > 0\,.$$

Así que nuestro objetivo es analizar la función *real* de *variable real* $s \longmapsto \varphi(s)$ que acabamos de introducir.

¡Atención!, entra en escena la variable compleja con prepotente altanería y sin atisbo de miramientos: Definamos la función *entera* f dada por

$$f(z) = \sum_{j=1}^n p_j \alpha_j^z\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Recordemos que $\alpha_j^z = \exp\big((\ln(\alpha_j) z\big)$, donde $\ln(\alpha_j)$ es el logaritmo (usual) del número positivo α_j.

Observe, lector, que para valores de z reales, $z = s$, tenemos que $f(z) = \varphi(s)$, así que f es extensión a todo el plano complejo de la función $\varphi(s)$. O mejor, lo que hemos exhibido es que la función φ es la restricción al eje real de una función entera. Las funciones holomorfas son particularmente ricas en propiedades de las que carecen las funciones infinitamente derivables de variable real, y a las que se pueden aplicar principios rígidos como el de unicidad o el del módulo máximo. O el teorema de las 3 rectas en el que como por ensalmo surgen propiedades de convexidad.

☞ **Nota** 2.2.3. ☜ Este es un ejemplo de una estrategia general, extremadamente útil, que veremos en acción con frecuencia, algo así como "*complejar*"[7], que no *complicar* ni *acomplejar*[8], al declarar que un variable real como s pase a ser compleja como z, para así tener una función holomorfa con toda la riqueza y rigidez que eso supone. Las funciones ζ de Riemann o la función Γ de Euler quizás sean los ejemplos primordiales de esta estrategia. Una instancia, en cualquier caso de aquel dictum de Hadamard:

[7] ¡Mil perdones!, por tamaño palabro.

[8] ¡Bueno, bueno!, no estoy yo tan seguro.

> It has been written that the shortest and best way between two truths of the real domain often passes through the imaginary one.

que en cualquier caso parece que proviene de Painlevé (y es a lo que quizá aludía Hadamard con lo de *It has been written...*)

> Le développement naturel de cette étude conduisit bientôt les géomètres à embrasser dans leurs recherches les valeurs imaginaires de la variable aussi bien que les valeurs réelles. La théorie de la série de Taylor, celle des fonctions elliptiques, la vaste doctrine de Cauchy firent éclater la fécondité de cette généralisation. Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.

♠

Nótese que

$$|f(z)| \leq f(\Re(z))\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

y que, de hecho,

$$L(f,s) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, \alpha_j^s = f(s)\,, \qquad \text{para todo } s > 0\,.$$

Por tanto, por el teorema de las 3 rectas y como queríamos comprobar, $s \longmapsto \ln(\int_X h(x)^s\, d\mu(x))$ es una función convexa.

☞ **Nota** 2.2.4. ☜ Hemos restringido la discusión anterior a los $s > 0$, pero en realidad el argumento nos da que para esa h simple la función $s \longmapsto \ln(\int_R h(x)^s\, d\mu(x))$ es convexa en todo $\mathbb{R}$.

Una comprobación directa de esta convexidad pasa por escribir $\phi(s) = \int_\Omega h(x)^s\, d\mu(x)$ y observar que la convexidad de $\ln(\phi(s))$ equivale a que

$$\phi''(s)\phi(s) \geq \phi'(s)^2\,, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R}\,,$$

es decir, a que

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \ln(\alpha_j)\, \alpha_j^s\Big)^2 \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \ln^2(\alpha_j)\, \alpha_j^s\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \alpha_j^s\Big)\,,$$

que se sigue de la desigualdad de Cauchy–Schwarz. ♠

B. Desigualdad de Hölder

Ya puestos, nos preguntamos, ¿y la propia desigualdad de Hölder? Pues, sí, cómo no, vamos a deducirla a continuación asimismo del teorema de las 3 rectas.

Nos conformamos con comprobar que la desigualdad de Hölder se cumple para funciones simples g, h no negativas:

$$g = \sum_j \alpha_j\, \mathbf{1}_{A_j}\,, \quad h = \sum_k \beta_k\, \mathbf{1}_{B_k}\,.$$

Con $\alpha_j > 0$, A_j disjuntos a pares y $\sum_j \mu(A_j) < +\infty$ y análogamente en la expresión de h.

Fijemos un par de exponentes conjugados $p, q > 1$, de manera que $1/p + 1/q = 1$.

Sea F la función entera[9] dada por

$$F(z) = \int_X g(x)^{p(1-z)} h(x)^{qz} d\mu(x)\,,$$

que expandimos usando las expresiones de g y h como funciones simples que son

$$F(z) = \sum_{j,k} \mu(A_j \cap B_k) \alpha_j^{p(1-z)} \beta_k^{qz}\,,$$

para que sea transparente que F es en verdad una función entera.

Interpretamos que si $g(x) = 0$ entonces $g(x)^{p(1-z)} = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y análogamente para h.

Observe, lector, los siguientes valores particulares de F:

$$\begin{aligned} F(0) &= \textstyle\int_X g(x)^p \, d\mu(x),\\ F(1) &= \textstyle\int_X h(x)^q \, d\mu(x),\\ F(1/q) &= \textstyle\int_X g(x)h(x) \, d\mu(x), \end{aligned}$$

y, observe además, que

$$L(F, s) = F(s)\,, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Además, note, lector, que $|F|$ está acotada en cualquier banda $\mathbb{V}_{a,b}$ con $a < 0$ y $b > 1$, de hecho está acotado por $\max\{F(s); a \le s \le b\}$.

El teorema de las 3 rectas nos dice entonces que

$$s \in (a, b) \longmapsto \ln(L(F, s)) = \ln(F(s)) \quad \text{es convexa}\,.$$

Por tanto,

$$\ln(F(s)) \le (1 - s) \ln(F(0)) + s \ln(F(1))\,, \qquad \text{para todo } s \in [0, 1]\,.$$

En particular, para $s = 1/q$, se deduce que

$$F(1/q) \le F(0)^{1/p} F(1)^{1/q}\,,$$

es decir,

$$\int_X g(x)h(x) d\mu(x) \le \Big(\int_X g(x)^p d\mu(x)\Big)^{1/p} \Big(\int_X h(x)^q d\mu(x)\Big)^{1/q};$$

¡voilà!: la desigualdad de Hölder.

[9] ¡Tachán!

C. Teorema de interpolación de Riesz–Thorin

El teorema de Riesz–Thorin es una de las semillas primigenias de la llamada **interpolación de operadores**, que es una potente técnica, y hasta, si se quiere, una teoría. Este Riesz es Marcel Riesz y Thorin es Olof Thorin[10]. De la demostración que sigue dejó dicho Littlewood que le parecía

> [...] *the most impudent idea in mathematics.*

Si lo dijo Littlewood...

Éste es el marco: tenemos un operador lineal T que

- está acotado de L^{p_0} en L^{q_0} donde $1 < p_0, q_0 < +\infty$ con norma $N_0 := \|T\|_{p_0,q_0}$;
- y está acotado de L^{p_1} en L^{q_1} donde $1 < p_1, q_1 < +\infty$ con norma $N_1 := \|T\|_{p_1,q_1}$.

Entonces, esta es la conclusión, **teorema de Riesz–Thorin**, el operador T también está acotado de L^p en L^q para cualquier par (p, q) intermedio entre (p_0, q_0) y (p_1, q_1) en el sentido de que para para un cierto $\lambda \in [0, 1]$ se cumple que

$$\Big(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\Big) = (1-\lambda)\Big(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\Big) + \lambda\Big(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\Big),$$

que, simplemente, quiere decir que el punto $(1/p, 1/q)$ de $\mathbb{R}^2$ se encuentra en el segmento J que conecta $(1/p_0, 1/q_0)$ con $(1/p_1, 1/q_1)$. La conclusión se complementa además con la siguiente acotación de la norma del operador T entre L^p y L^q:

$$\ln \|T\|_{p,q} \le (1-\lambda) \ln \|T\|_{p_0,q_0} + \lambda \ln \|T\|_{p_1,q_1} = (1-\lambda)N_0 + \lambda N_1 .$$

Aflora ya la convexidad, leitmotiv de todo este apartado: la conclusión es que el logaritmo de la norma del operador T en el segmento J es una función convexa.

Tomemos g y h funciones simples tales que $\|g\|_p = 1$ y $\|h\|_{q'} = 1$, donde q' es el exponente conjugado de q.

Vamos a comprobar que

$$(\star) \qquad \Big| \int_X Tg(x)h(x)\, d\mu(x) \Big| \le N_0^{1-\lambda}\, N_1^{\lambda}.$$

Manteniendo g fija y tomando supremo en $(\star)$ sobre las tales h con $\|h\|_{q'} = 1$ obtendríamos que $\|Tg\|_q \le N_0^{1-\lambda} N_1^{\lambda}$ y liberando ahora a las g y tomando supremo sobre ellas (con $\|g\|_p = 1$) obtendríamos $\|T\|_{p,q} \le N_0^{1-\lambda} N_1^{\lambda}$.

☞ **Nota** 2.2.5. ☜ El operador T en principio sólo está definido en $L^{p_0} \cap L^{p_1}$, que contiene, claro, a las funciones simples. La desigualdad $(\star)$ acota T en su subespacio denso. De hecho, la conclusión completa del argumento es que T que está definido sólo en $L^{p_0} \cap L^{p_1}$ se puede extender

[10] Riesz había obtenido un primer resultado de corte matricial. Y Thorin, alumno de (doctorado de) Riesz logró la versión actual en su tesis. Thorin fue, profesionalmente, actuario de seguros, como Alfred Tauber.

a partir de ($\star$) a un operador definido en todo L^p. No elaboramos el detalle de este argumento y nos conformamos con la verificación de ($\star$) que es el busilis inequívoco del asunto. ♠

Vamos pues con la verificación de ($\star$). Pasemos inmediatamente, sin más dilación, a modo complejo, sustituyendo $\lambda \in (0,1)$ por z en $\mathbb{C}$.

Definamos $p(z)$ y $q'(z)$ para $z \in \mathbb{C}$ mediante

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p(z)} = \dfrac{1-z}{p_0} + \dfrac{z}{p_1}\,, \\ \dfrac{1}{q'(z)} = \dfrac{1-z}{q_0'} + \dfrac{z}{q_1'}\,. \end{cases}$$

Las primas '$'$' refieren a exponentes conjugados. El asunto ciertamente se está volviendo un tanto sicalíptico, Mr. Littlewood.

No está demás apuntar que $1/p(z)$ y $1/q'(z)$ son funciones enteras de z.

Observe, lector, cómo $p(z)$ y $q(z)$ interpolan los valores de interés:

$$\begin{array}{ll} p(0) = p_0\,; & q(0) = q_0\,, \\ p(\lambda) = p\,; & q(\lambda) = q\,, \\ p(1) = p_1\,; & q(1) = q_1\,. \end{array}$$

Rayando en lo impúdico, definamos ahora para $z \in \mathbb{C}$ y para $x \in X$

$$(\dagger) \quad g_z(x) = |g(x)|^{p/p(z)}\,\frac{g(x)}{|g(x)|}\,.$$

Esta definición se aplica si $g(x) \neq 0$, en caso contrario tomaríamos $g_z(x) = 0$.

☞ **Nota** 2.2.6. ☜ Expliquemos esta aparatosa expresión ($\dagger$). Si g fuera positiva, habríamos puesto simplemente $g_z(x) = g(x)^{p/p(z)}$, y para cada x tal que $g(x) \neq 0$ tendríamos una función entera de z. ♠

Conviene, quizás, que explicitemos que si $g = \sum_j \alpha_j\, \mathbf{1}_{A_j}$ donde ahora los α_j son números complejos no nulos y los A_j son disjuntos dos a dos y de μ medida finita entonces

$$g_z = \sum_j |\alpha_j|^{p/p(z)}\,\frac{\alpha_j}{|\alpha_j|}\,\mathbf{1}_{A_j}\,,$$

y, usando la linealidad del operador T que

$$T(g_z) = \sum_j |\alpha_j|^{p/p(z)}\,\frac{\alpha_j}{|\alpha_j|}T\big(\,\mathbf{1}_{A_j}\big)\,.$$

Registremos además que

$$g_\lambda \equiv g\,,$$

y que

$$|g_{\imath y}|^{p_0} \le |g|^p \quad \text{y} \quad |g_{1+\imath y}|^{p_1} \le |g|^p\,, \qquad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Análogamente, definimos para $z \in \mathbb{C}$ y para $x \in X$

$$h_z(x) = |h(x)|^{q'/q'(z)} \frac{h(x)}{|h(x)|}\,.$$

Observe, lector, que análogamente

$$h_\lambda \equiv h\,,$$

y que

$$|h_{\imath y}|^{q_0'} \le |h|^{q'} \quad \text{y} \quad |h_{1+\imath y}|^{q_1'} \le |h|^{q'}\,, \qquad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Consideremos finalmente la función entera

$$F(z) = \int_X T(g_z) h_z \, d\mu\,.$$

Desarrollada en toda su gloria, para así exhibir el esplendor de su entereza[11], F se escribe

$$F(z) = \sum_{j,k} |\alpha_j|^{p/p(z)} \frac{\alpha_j}{|\alpha_j|} \; |\beta_k|^{q'/q'(z)} \frac{\beta_k}{|\beta_k|} \; \Big(\int_X T\big(\mathbf{1}_{A_j}\big)\, \mathbf{1}_{B_k} \, d\mu\Big),$$

donde hemos representado la función simple h como $h = \sum_k \alpha_k \, \mathbf{1}_{B_k}$, expresión análoga a la de g.

Obsérvese que

$$F(\lambda) = \int_X Tg(x) h(x) \, d\mu(x),$$

así que nuestra única ambición es acotar $|F(\lambda)|$, que es el lado izquierdo de $(\star)$.

Para $z = \imath y$ con $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned}|F(\imath y)| &\le \int_X |T(g_z)||h_z| d\mu \le \|T(g_z)\|_{q_0} \, \|h_z\|_{q_0'} \\ &\le N_0 \, \|g_z\|_{p_0} \, \|h_z\|_{q_0'} \le N_0 \, (\|g\|_p)^{p/p_0} \, (\|h\|_{q'})^{q'/q_0'} = N_0\,.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$L(F,0) \le N_0\,,$$

Análogamente,

$$L(F,1) \le N_1\,.$$

El teorema de las 3 rectas nos da finalmente[12] que

$$|F(\lambda)| \le L(F,0)^{1-\lambda} \, L(F,1)^\lambda \le N_0^{1-\lambda} \, N_1^\lambda\,,$$

[11] ¡Perdón!

[12] Sí, finalmente.

que es justo lo que queríamos probar.

El lector meticuloso, como no puede ser de otra manera, imbuido, como es el caso, si ha llegado hasta este punto de esta tan parsimoniosa argumentación como las que nos ocupa, del espíritu Phragmén–Lindelöf, espetará que ¡cuidado! para poder aplicar el teorema de las 3 rectas habrá que haber comprobado que F está acotado sobre la banda vertical $\mathbb{V}_{0,1}$. Cierto, así es.

Definamos, para $z \in \mathbb{C}$,

$$\omega(z) := \Re\Big(\frac{p}{p(z)}\Big) = p\Big(\frac{1-\Re(z)}{p_0} + \frac{\Re(z)}{p_1}\Big),$$
$$\eta(z) := \Re\Big(\frac{q'}{q'(z)}\Big) = q'\Big(\frac{1-\Re(z)}{q'_0} + \frac{\Re(z)}{q'_1}\Big).$$

Obsérvese que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|F(z)| \le \sum_{j,k} |\alpha_j|^{\omega(z)} |\beta_k|^{\eta(z)} \Big| \int_X T\big(\mathbf{1}_{A_j}\big)\, \mathbf{1}_{B_k}\, d\mu \Big|.$$

Concluimos que $|F|$ está acotada en cualquier banda vertical $\mathbb{V}_{a,b}$ cualesquiera que sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

2.2.5. Principio de incertidumbre de Hardy

El *principio de incertidumbre para la transformada de Fourier* afirma que no pueden ser simultáneamente «pequeñas» una función f y su transformada de Fourier $\widehat{f}$ salvo que f (y, por tanto, también $\widehat{f}$) sea idénticamente 0. Por ejemplo, y sólo por ejemplo, no pueden ser f y $\widehat{f}$ ambas de soporte compacto, salvo en el caso trivial en que ambas f y $\widehat{f}$ sean idénticamente nulas.

Vamos a describir y demostrar una versión bien precisa de este principio de incertidumbre debida al gran Hardy, que se basa y se apoya en una aplicación elegantemente sutil[13] del método de Phragmén–Lindelöf.

Usaremos en este estudio la extensión a variable compleja de la transformada de Fourier, que explicamos más adelante. Pero antes recopilaremos los resultados básicos que precisamos de la transformada de Fourier de variable real.

A. Recopilatorio de transformada de Fourier de variable real

Para cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R})$ definimos su transformada de Fourier $\widehat{f}$, en castizo, f-gorro, como la función definida en $\mathbb{R}$ dada por

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x t} f(t) \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

[13] Habíamos dicho ya que es debida al gran Hardy. Sí. ¡Ah!

Para cada $x \in \mathbb{R}$, esta integral converge absolutamente y, de hecho,

$$|\widehat{f}(x)| \leq \|f\|_1 , \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} .$$

La transformada de Fourier es obviamente lineal. La transformada de Fourier es un operador lineal acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ con norma ≤ 1.

Por cierto, las normas $L^p(\mathbb{R})$ en lo que sigue lo son con respecto a la medida $dt/\sqrt{2\pi}$: para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \Big)^{1/p} .$$

Y, además, y, por si acaso, resaltamos que las funciones en $L^p(\mathbb{R})$ son funciones con valores en $\mathbb{C}$, de manera que $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial complejo.

FOU 1. **Lema de Riemann–Lebesgue.** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, es decir, $\widehat{f}$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$ y además

$$\lim_{x \to \pm\infty} \widehat{f}(x) = 0 .$$

☞ **Nota** 2.2.7. ☜ La continuidad se sigue de escribir

$$\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} (e^{-\imath h t} - 1) e^{-\imath x t} f(t) \, \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

y aplicar el teorema de la convergencia dominada.

Si tomamos $g \equiv \mathbf{1}_{[a,b]}$, entonces

$$\widehat{g}(x) = \frac{\imath}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\imath b t} - e^{-\imath a t}}{x} .$$

De manera que en este caso $\lim_{x \to \pm\infty} \widehat{g}(x) = 0$. Lo mismo se cumple obviamente cuando g es una función simple (combinación lineal finita de indicatrices de intervalos finitos y disjuntos dos a dos). Ahora, dada $f \in L^1$ y $\varepsilon > 0$, tomamos g simple tal que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$, y, por tanto, que $\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty \leq \varepsilon$, para deducir que $\limsup_{x \to \pm\infty} |\widehat{f}(x)| \leq \varepsilon$. Y, por tanto que $\lim_{x \to \pm\infty} \widehat{f}(x) = 0$. ♠

FOU 2. **Inversión de la transformada de Fourier.** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath t x} \widehat{f}(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} .$$

Esto implica que $f \in C_0(\mathbb{R})$ y que la identidad anterior es válida para todo $t \in \mathbb{R}$. Obsérvese que

$$f(t) = \widehat{(\widehat{f}\,)}(-t) , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} .$$

FOU 3. **Punto fijo.** La función $f(t) = e^{-t^2/2}$ es un punto fijo para la transformada de Fourier. Es decir, $\widehat{f}(t) = e^{-t^2/2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

☞ **Nota** 2.2.8. ☜ Fijemos $x \in \mathbb{R}$. Completamos cuadrados y escribimos

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x t} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = e^{-x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\imath x + t)^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \,.$$

Veamos que sea cual sea $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$I_x = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\imath x+t)^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}\,.$$

Recuerde, lector, que

$$I_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}\,.$$

El argumento es el mismo para $x \geq 0$ que para $x \leq 0$. Suponemos en lo que sigue $x \geq 0$.

Sea g la función entera $g(z) = e^{-z^2/2}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Para $T > 0$, consideremos el camino cerrado γ_T que recorre el rectángulo con vértices $\pm T, \pm T + \imath x$, en sentido positivo.

Como la función g es entera,

$$(\natural) \qquad \int_{\gamma_T} g(z)\, dz = 0\,, \quad \text{para todo } T > 0\,.$$

Comprobemos que

$$(\flat) \qquad \lim_{T\to\infty} \int_{[T, T+\imath x]} g(z)\, dz = 0\,.$$

Análogamente, se prueba que

$$\lim_{T\to\infty} \int_{[-T, -T+\imath x]} g(z)\, dz = 0\,.$$

Con estos dos límites, usando $(\natural)$ y haciendo $T \to \infty$ se concluye que $I_x = I_0 = \sqrt{2\pi}$.

Para comprobar $(\flat)$, parametrizamos $z = T + \imath s$, con $0 \leq s \leq x$. Observe, lector, que para $z = T + \imath s$ se tiene que

$$|e^{-z^2/2}| = e^{-T^2/2} e^{s^2/2}\,.$$

Por tanto,

$$\Big| \int_{[T, T+\imath x]} g(z) dz \Big| \leq e^{-T^2/2} \int_0^x e^{s^2/2}\, ds$$

De donde, con x fijo y haciendo $T \to \infty$, se obtiene $(\flat)$. ♠

FOU 4. **Cambio de escala.** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y si $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$, para la función g definida por

$$g(t) = f(\gamma t)\,, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,,$$

se tiene que

$$\widehat{g}(x) = \frac{1}{\gamma}\, \widehat{f}\Big(\frac{x}{\gamma}\Big)\,, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,.$$

☞ **Nota** 2.2.9. ☜ Fijemos $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$. Observe, lector, que $g \in L^1(\mathbb{R})$. Cambio de variable:

$$\widehat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath t x} g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath t x} f(\gamma t) dt \overset{[\gamma t = s]}{=} \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath s (x/\gamma)} f(s) ds = \frac{1}{\gamma} \widehat{f}\Big(\frac{x}{\gamma}\Big)\,.$$

♠

Definamos para $\alpha > 0$, la función f_α por

$$f_\alpha(t) = e^{-\alpha t^2}\,, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,.$$

Con $\gamma = 1/\sqrt{2\alpha}$, se tiene que

$$f_\alpha(\gamma t) = f_{1/2}(t)\,, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\widehat{f_\alpha}(x) = \gamma \widehat{f_{1/2}}(x\gamma) = \gamma e^{-x^2/4\alpha} = \gamma f_\beta(x)\,,$$

donde $\beta = 1/(4\alpha)$.

B. Transformada de Fourier de variable compleja

Para $f \in L^1(\mathbb{R})$ definimos la transformada de Fourier de variable compleja z

$$\mathcal{F}(f)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath z x} f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Para $z = t \in \mathbb{R}$, se tiene $\mathcal{F}(z) = \widehat{f}(t)$.

Proposición 2.22 *Sea f una función medible tal que para constantes $C, a > 0$ se tiene que*

$$(\star) \quad |f(t)| \le C e^{-a\,|t|}\,, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}\,,$$

entonces $\mathcal{F}(f)$ es una función holomorfa en todo el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < a\}$.

Observe, lector, que la condición $(\star)$ ya implica que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos en primer lugar que $\mathcal{F}(f)(z)$ está bien definida en todo el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < a\}$. Es decir, que la integral que define a $\mathcal{F}(f)(z)$ es absolutamente integrable.

Si $z = t + \imath s$, con $t, s \in \mathbb{R}$ y $s < a$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\imath z x} f(x) \right| \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \left| f(x) \right| \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \le \int_{\mathbb{R}} e^{sx} e^{-a|x|} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} < +\infty\,,$$

pues $s < a$.

Para comprobar la holomorfía de $\mathcal{F}(f)$ apelaremos al siguiente lema:

Lema 2.23 *Si $w \in \mathbb{C}$ y si $h \in \mathbb{C}$ y $h \neq 0$, entonces*

$$\left| \frac{e^{w\,h} - 1}{h} - w \right| \le |w|^2\, |h|\, e^{|w|\,|h|}\,.$$

demostración. Basta comprobar que

$$\left|e^\eta - 1 - \eta\right| \le |\eta|^2 e^{|\eta|}\,, \quad \text{para todo } \eta \in \mathbb{C}\,.$$

Como

$$e^\eta - 1 - \eta = \sum_{n=2}^\infty \frac{\eta^n}{n!} = \eta^2 \sum_{n=0}^\infty \frac{\eta^n}{(n+2)!}\,,$$

se tiene que

$$\left|e^\eta - 1 - \eta\right| \le |\eta|^2 \sum_{n=0}^\infty \frac{|\eta|^n}{(n+2)!} \le |\eta|^2 \sum_{n=0}^\infty \frac{|\eta|^n}{n!} = |\eta|^2 e^{|\eta|}\,.$$

■

Seguimos con la demostración de la holomorfía de $\mathcal{F}(f)$.

Sea $z = t + \imath s$ y $s < a$. Tomemos $b > 0$ tal que $s < b < a$.

La derivada de $\mathcal{F}(f)$ en z «debe ser» (derivando respecto de z alegremente bajo el signo integral)

$$-\int_{\mathbb{R}} \imath t e^{-\imath z t} f(t)\, dt\,.$$

Esta integral es absolutamente convergente pues $|t||f(t)| \le C^\star\, e^{-b|t|}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, con $C^\star$ que depende de C, a y b.

Tomemos un incremento $h \in \mathbb{C}$ tal que $|h| < (a-b)/2$.

Escribamos

$$\frac{\mathcal{F}(z+h) - \mathcal{F}(z)}{h} + \int_{\mathbb{R}} \imath t e^{-\imath z t} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath z t} f(t) \Big(\frac{e^{-\imath h t} - 1}{h} + \imath t\Big) dt\,.$$

Para acotar, introduciremos el valor absoluto dentro del signo integral, que $|e^{-\imath z t}| = e^{st} \le e^{b|t|}$, la acotación $(\star)$ de $|f|$ del enunciado y la acotación que nos da el lema con $w = \imath t$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathcal{F}(z+h) - \mathcal{F}(z)}{h} + \int_{\mathbb{R}} \imath t e^{-\imath z t} f(t)\, dt\right| &\le C \int_{\mathbb{R}} e^{b|t|} e^{-a|t|}\, |t|^2 |h| e^{|t|\,|h|}\, dt \\ &\le C|h| \int_{\mathbb{R}} |t|^2\, e^{-(a-b)|t|/2} dt\,.\end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} |t|^2\, e^{-(a-b)|t|/2} dt < +\infty$, haciendo $h \to 0$, concluimos que $\mathcal{F}$ es derivable en z y, por tanto, como queríamos, que $\mathcal{F}(f)$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < a\}$. ■

Corolario 2.24 *Sea f una función medible en $\mathbb{R}$ tal que para ciertas constantes $C, b > 0$ cumple que*

$$|f(t)| \le C e^{-b\,|t|^2}\,, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

entonces la transformada de Fourier compleja $\mathcal{F}(f)$ es una función entera.

Este corolario se sigue de que para cualquier $a > 0$ se tiene que $e^{-b|t|^2} \leq e^{-a|t|}e^{a^2/4b}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para la función $f(x) = e^{-x^2/2}$, se tiene que

$$\mathcal{F}(f)(z) = e^{-z^2/2}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Esto es consecuencia del principio de ceros aislados (o teorema de identidad): estas dos funciones enteras, $\mathcal{F}(f)$ y $e^{-z^2/2}$, coinciden en todo el eje real, pues para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\mathcal{F}(f)(x) = \widehat{f}(x) = e^{-x^2/2}$, por la propiedad de punto fijo Fou3.

C. Lema de Hardy

Este lema de Hardy será la pieza clave de la demostración de su principio de incertidumbre. El lema es una preciosa ilustración de aplicación del método de Phragmén–Lindelöf con un giro sutil. El argumento de la demostración de este lema es más general de lo que a primera vista pueda parecer y tras él, tras el argumento, se esconde agazapada la noción de indicatriz de Phragmén–Lindelöf.

Lema 2.25 *Sea $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0, \Im(z) > 0\}$, el primer cuadrante del plano complejo. Supongamos que f es una función holomorfa en $\mathcal{C}$ y continua en $\partial\mathcal{C}$ y que para constantes $A > 0$, $B > 0$ y $\beta > 0$ se cumple que*

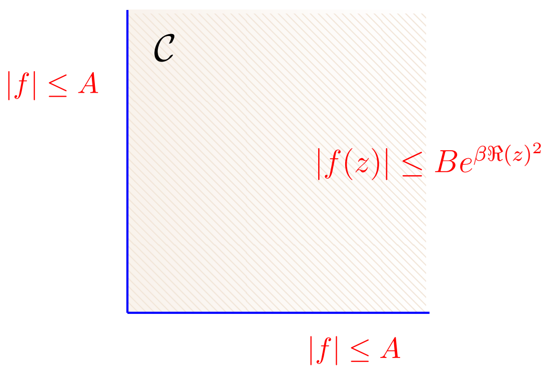
$$|f(z)| \leq A\,, \quad \textit{para todo } z \in \partial\mathcal{C}\,,$$

y que

$$|f(z)| \leq B\, e^{\beta\Re(z)^2}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathcal{C}\,.$$

Entonces,

$$|f(z)| \leq \max(A, B)\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathcal{C}\,.$$



Dibujo 2.4. Lema de Hardy.

La condición de tipo Phragmén–Lindelöf habitual para un tal cuadrante $\mathcal{C}$ es que $|f(z)| \le Ce^{|z|^\delta}$ con $\delta < 2$. En términos de $|z|$, la hipótesis del lema sólo da $|f(z)| \le Be^{\beta|z|^2}$ que no bastaría. El busilis del asunto estriba en que aunque el término en la exponencial es cuadrático sólo es x^2 y no $x^2 + y^2$.

El plan de ataque de la demostración pasa por considerar un sector algo más pequeño que $\mathcal{C}$ donde sí se puede aplicar el habitual Phragmén–Lindelöf con $|z|^2$ en la exponencial, ayudando al tiempo un poco a f para que en el nuevo dominio se mantengan las condiciones frontera.

demostración. Jugaremos con dos parámetros auxiliares: $\lambda > 0$ y $\delta > 0$, el primero con manifiesta voluntad de escapar a ∞ y el segundo que humildemente sólo ansía refugiarse en 0.

Para $\lambda > 0$, sea Γ_λ el dominio

$$\Gamma_\lambda = \{z = x + \imath y \in \mathbb{C} : 0 < y < \lambda x\} \subset \mathcal{C}\,.$$

Observe, lector, que Γ_λ abarca un ángulo de $\arctan(\lambda) < \pi/2$. Además, cuando $\lambda \uparrow +\infty$, el sector Γ_λ acaba abarcando todo $\mathcal{C}$.

Para $\delta > 0$, sea g_δ la función

$$g_\delta(z) = e^{\imath\delta z^2} f(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathcal{C} \cup \partial\mathcal{C}\,.$$

La función g_δ es holomorfa en $\mathcal{C}$ y continua en $\mathcal{C} \cup \partial\mathcal{C}$. Observe, lector, que para z fijo, se tiene que $\lim_{\delta\downarrow 0} g_\delta(z) = f(z)$.

Vamos a aplicar el teorema 2.11 de Phragmén–Lindelöf para sectores a la función g_δ en el sector Γ_λ con simbiótica y dinámica elección de λ y de δ.

Acotamos g_δ en $\partial\Gamma_\lambda$.

∘ Si $z = x > 0$,

$$|g_\delta(x)| = |e^{\imath\delta x^2}|\,|f(x)| = |f(x)| \le A\,.$$

∘ Si $z = x + \imath y$, con $y = \lambda x > 0$,

$$|g_\delta(z)| = |e^{\imath\delta z^2}|\,|f(z)| = e^{-2\delta x\, y}\,|f(z)| \le e^{-2\delta x\, y}\, Be^{\beta x^2} = Be^{(\beta-2\lambda\delta)x^2}\,.$$

Por tanto, si λ y δ son tales que $\beta - 2\lambda\delta = 0$, entonces se tiene que

$$|g_\delta(z)| \le \max(A, B)\,, \quad \text{para todo } z \in \partial\Gamma_\lambda\,.$$

Acotamos g_δ en Γ_λ.

∘ Si $z = x + \imath y \in \Gamma_\lambda$, entonces

$$|g_\delta(z)| = |e^{\imath\delta z^2}|\,|f(z)| = e^{-2\delta x\, y}\,|f(z)| \le e^{-2\delta x\, y} Be^{\beta x^2} \le Be^{\beta x^2} \le Be^{\beta|z|^2}\,.$$

El teorema 2.11 de Phragmén–Lindelöf nos dice entonces que para todo $\lambda > 0$, tomando $\delta = \beta/(2\lambda)$ se tiene que

$$|g_\delta(z)| \le \max(A, B)\,, \quad \text{para todo } z \in \Gamma_\lambda\,.$$

Fijemos $z \in \mathcal{C}$ y sea λ_0 tal que $z \in \Gamma_{\lambda_0}$, entonces

$$|g_\delta(z)| \leq \text{máx}(A, B)\,, \quad \text{para todo } \lambda > \lambda_0\,.$$

Haciendo $\lambda \uparrow +\infty$ y, por tanto, $\delta = \beta/(2\lambda) \downarrow 0$, se obtiene, teniendo en cuenta que $g_\delta(z) \to f(z)$, que

$$|f(z)| \leq \text{máx}(A, B)\,. \qquad \blacksquare$$

D. Teorema de incertidumbre de Hardy

El anunciado teorema de incertidumbre de Hardy afirma lo siguiente.

Teorema 2.26 (Teorema de incertidumbre de Hardy) *Sea f una función medible en $\mathbb{R}$ tal que*

$$|f(t)| \leq C e^{-t^2/2}\,, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.2}$$

y tal que su transformada de Fourier $\widehat{f}$ cumple asimismo

$$|\widehat{f}(x)| \leq C e^{-x^2/2}\,, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}\,, \tag{2.3}$$

para una cierta constante $C > 0$. Entonces, existe una constante $\Lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(t) = \Lambda\, e^{-t^2/2}\,, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}\,.$$

Por supuesto, la cota de f nos dice que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Conviene apuntar que la transformada de Fourier $\widehat{f}$ de la f del enunciado cumple asimismo que $\widehat{f}(x) = \Lambda e^{-x^2/2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Antes de abordar la demostración del teorema 2.26 exhibimos un par de corolarios.

Corolario 2.27 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y si f y $\widehat{f}$ tienen soporte compacto, entonces f, y $\widehat{f}$, son idénticamente nulas.*

DEMOSTRACIÓN. La transformada $\widehat{f}$ es continua. Como por hipótesis $\widehat{f}$ tiene soporte compacto, la función $\widehat{f}$ está acotada en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, de sobras cumple la acotación (2.3).

Además, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ y por tanto por el teorema de inversión, tenemos que f es asimismo continua. Como por hipótesis f tiene soporte compacto, f está acotada en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, cumple la acotación (2.2).

El teorema de incertidumbre de Hardy nos dice entonces que f ha de ser un múltiplo de la función $e^{-t^2/2}$, es decir,

$$f(t) = K e^{-t^2/2}\,, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,,$$

para una cierta constante $K \geq 0$. Pero esta conclusión para f y la hipótesis de que f tiene soporte compacto sólo son compatibles si $K = 0$, es decir, si, como queríamos comprobar, $f \equiv 0$. $\blacksquare$

Corolario 2.28 *Supongamos que f es medible en $\mathbb{R}$ y que para una constante $\alpha > 0$ se tiene que*

$$|f(t)| \le Ce^{-\alpha t^2}, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R},$$

y que, además, $\widehat{f}$ cumple que para un constante $\beta > 0$ se tiene que

$$|\widehat{f}(x)| \le Ce^{-\beta x^2}, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R},$$

para una cierta constante $C > 0$.

Bajo estas condiciones:

1) *Si $\alpha\beta = 1/4$, entonces para una cierta constante $\Lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$f(t) = \Lambda\, e^{-\alpha\, t^2}, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R},$$

y que

$$\widehat{f}(x) = \frac{\Lambda}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\beta\, x^2}, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

2) *Si $\alpha\beta > 1/4$, entonces f, y $\widehat{f}$, son idénticamente nulas.*

Observe, lector, que el corolario 2.27 es un caso bien particular de este corolario, pero queríamos destacarlo.

DEMOSTRACIÓN. 1) Denotemos $\gamma = 1/\sqrt{2\alpha}$. Sea g la función dada por

$$g(t) = f(\gamma\, t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

La función g cumple la acotación (2.2) del teorema 2.26.

La transformada de Fourier de g es

$$\widehat{g}(x) = \frac{1}{\gamma}\, \widehat{f}\Big(\frac{x}{\gamma}\Big), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como $\beta/\gamma^2 = 2\alpha\beta = 1/2$, pues $\alpha\beta = 1/4$, la transformada $\widehat{g}$ cumple la acotación (2.3) del teorema 2.26.

Por consiguiente, en virtud del teorema 2.26 de Hardy, existe una constante $\Lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$g(t) = \Lambda e^{-t^2/2}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Y, por tanto,

$$f(t) = \Lambda e^{-\alpha t^2}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como queríamos ver.

2) Vamos ahora con la demostración segunda parte del enunciado. Sea $0 < \delta < \alpha$, tal que $\delta\beta = 1/4$.

Como $\delta < \alpha$, tenemos que

$$|f(t)| < Ce^{-\delta t^2}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como $\delta\beta = 1/4$, la parte 1) nos dice que para una cierta constante $\Lambda \geq 0$, se tiene que f es la función
$$f(t) = \Lambda e^{-\delta t^2}\,, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,.$$
Pero si $\Lambda \neq 0$ esto es incompatible con la acotación supuesta de f. Así que $\Lambda = 0$ y $f \equiv 0$, como queríamos comprobar. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.26 DE HARDY. Denotemos por $F = \mathcal{F}(f)$ a la transformada de Fourier de f de variable compleja. La supuesta acotación (2.2) de f y el corolario 2.24 nos dicen que F es una función entera.

Sea G la función definida por
$$G(z) = e^{z^2/2} F(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$
La función G es asimismo una función entera.

Vamos a comprobar que la función G es constante. Con esto ya habremos completado la demostración porque entonces, para un cierto Λ, se tiene que
$$F(z) = \Lambda e^{-z^2/2}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$
de donde, si $x \in \mathbb{R}$
$$\widehat{f}(x) = F(x) = \Lambda e^{-x^2/2}\,,$$
y, por tanto,
$$f(t) = \Lambda e^{-t^2/2}\,, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,.$$

Para comprobar que G es constante, probaremos que G está acotada en todo $\mathbb{C}$ y apelaremos al teorema de Liouville.

Verificaremos que G está acotada en el primer cuadrante $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0, \Im(z) > 0\}$. Para los otros cuadrantes, podemos remedar el argumento que vamos a dar para $\mathcal{C}$ o argumentar por simetría usando la función conjugada $\overline{f}$ y la función $f(-t)$.

Aplicaremos el lema 2.25 de Hardy a G en $\mathcal{C}$, y esto depende de acotar G en $\partial\mathcal{C}$ y en el propio $\mathcal{C}$. Empezamos acotando F en $\mathcal{C}$.

Acotamos F. Para $z = x + \imath y \in \mathcal{C}$, con $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$, se tiene, usando la cota supuesta (2.2) de $|f|$, que
$$\begin{aligned}(\natural)\quad |F(z)| &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{yt} |f(t)| \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} e^{yt} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = C e^{y^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t-y)^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = C e^{y^2/2}\,.\end{aligned}$$

Acotamos G.

a) Para $z = x > 0$, se tiene, usando la cota supuesta (2.3) de $|\widehat{f}|$, que
$$|G(x)| = e^{x^2/2} |F(x)| = e^{x^2/2} |\widehat{f}(x)| \leq e^{x^2/2} C e^{-x^2/2} = C\,.$$

b) Para $z = \imath y$, con $y > 0$, se tiene, usando la acotación ($\natural$) de F que acabamos de obtener, que

$$|G(\imath y)| = e^{-y^2/2}|F(\imath y)| \le e^{-y^2/2} C e^{y^2/2} = C\,.$$

Estas dos cotas de G significan que $|G|$ está acotada por C en $\partial\mathcal{C}$.

Finalmente, para $z = x + \imath y \in \mathcal{C}$, con $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$, se tiene, usando la cota ($\natural$) de F obtenida más arriba, tenemos

$$|G(z)| = |e^{z^2/2}|\,|F(z)| = e^{(x^2-y^2)/2}\,|F(z)| = e^{(x^2-y^2)/2} C e^{y^2/2} = C e^{x^2/2}\,.$$

Una apelación al lema 2.25 de tipo Phragmén–Lindelöf de Hardy completa la demostración de la acotación de G en $\mathcal{C}$ y con ello la del principio de incertidumbre de Hardy. ■

2.2.6. Algunos otros principios de incertidumbre

Son estos que tratamos aquí principios de incertidumbre de más baja intensidad que el de Hardy, pero tienen su gracejo[14] y los vamos a demostrar con truquillos[15] de variable compleja, así que bienvenidos sean.

A. Principio de incertidumbre de Heisenberg

Supongamos que f es una función C^∞ con valores reales que se anula rápidamente en $\pm\infty$, es decir, más rápidamente que cualquier polinomio, en otros palabras, $\lim_{t\pm\infty} |t|^k |f(t)| = 0$ para todo entero $k \ge 0$. Funciones con estas propiedades se conocen como funciones de la clase $\mathcal{S}$ de Laurent Schwartz. Observe, lector, que si $f \in \mathcal{S}$ entonces $f' \in \mathcal{S}$ y $tf(t) \in \mathcal{S}$.

Usaremos dos hechos sobre la transformada de Fourier real de estas funciones:

Fou 5. **Isometría en L^2.** Si $f \in \mathcal{S}$, entonces

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2\,.$$

Fou 6. **Derivadas y transformada de Fourier.** Si $f \in \mathcal{S}$, entonces

$$\widehat{f'}(x) = x\widehat{f}(x)\,, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,.$$

Integración por partes nos da que

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(t)dt = t\,f^2(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - 2\int_{\mathbb{R}} f(t)f'(t)t dt = -2\int_{\mathbb{R}} f(t)f'(t)t\,dt.$$

[14] ¡Qué condescendencia!
[15] ¡Perseveran en ufana condescendencia.

De manera que usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz se obtiene que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} f^2(t)dt\Big)^2 \le 4\Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)^2 t^2\,dt\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} f'(t)^2\,dt\Big).$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad por 2π, se deduce

$$\|f(t)\|_2^4 \le 4\|tf(t)\|_2^2\,\|f'(t)\|_2^2,$$

de donde, usando Fou5 y Fou6, se deduce que

$$\|f(t)\|_2^4 \le 4\|tf(t)\|_2^2\,\|\widehat{f}'(t)\|_2^2 = 4\|tf(t)\|_2^2\,\|x\widehat{f}(x)\|_2^2.$$

Teorema 2.29 (Teorema de incertidumbre de Heisenberg) *Si $f \in \mathcal{S}$ es tal que $\|f\|_2 = 1$, entonces*

$$\frac{1}{2} \le \|tf(t)\|_2\,\|x\widehat{f}(x)\|_2.$$

Así que $\|tf(t)\|_2$ y $\|x\widehat{f}(x)\|_2$ no pueden ser ambas simultáneamente pequeñas.

B. Transformada binómica

Denotemos con $\widehat{\mathbb{N}}$ a $\widehat{\mathbb{N}} = \{0,1,2\ldots\}$. Para una función $f : \widehat{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$, denotamos su **transformada binómica** $\mathcal{B}[f]$, como la función definida en $\widehat{\mathbb{N}}$ por

$$\mathcal{B}[f](n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k f(k), \quad \text{para } n \ge 0.$$

Obsérvese que el valor $\mathcal{B}[f]$ en n sólo depende de los valores de $f(k)$ con $0 \le k \le n$. De manera que si $f_1(n) = f_2(n)$ para $0 \le n \le N$, entonces $\mathcal{B}[f_1](n) = \mathcal{B}[f_2](n)$, para $0 \le n \le N$.

Teorema 2.30 (Inversión de la transformada binómica) *Si $f : \widehat{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ y $g = \mathcal{B}[f]$, entonces $f = \mathcal{B}[g]$. Es decir, la transformación binómica es auto-inversa.*

DEMOSTRACIÓN. a) Supongamos primero que f tiene soporte finito. Sea $F(z)$ el *polinomio*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!}\,z^n.$$

Sea $G(z)$ la función entera

$$(\star) \quad G(z) = e^z F(-z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

La función $G(z)$ se escribe

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{n!}\,z^n,$$

donde g es la transformada $g = \mathcal{B}[f]$ de f.

Damos la vuelta a $(\star)$ escribiendo

$$F(z) = e^z G(-z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

que en términos de coeficientes nos dice que, como queremos,

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k g(k)\,, \quad \text{para todo } n \geq 0$$

b) Vamos ahora con una f general.

Para $N \geq 1$ truncamos f a nivel N, es decir, formamos f_N dada por $f_N(n) = f(n)$, si $n \leq N$, y $f_N(n) = 0$ si $n > N$.

Sea $g_N = \mathcal{B}(f_N)$. Por el paso anterior, se tiene que $f_N = \mathcal{B}(g_N)$. Y como $g_N(n) = g(n)$, para $0 \leq n \leq N$, (y $f_N(n) = f(n)$, si $n \leq N$) se deduce que

$$f(n) = f_N(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k g_N(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k g(k)\,, \quad \text{para } 1 \leq n \leq N\,.$$

Liberando N y dejando que se marche a ∞, obtenemos, como queríamos probar, que

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k g(k)\,, \quad \text{para todo } n \geq 1\,.$$

■

Decimos que la $f\colon \widehat{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ es *entera* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|f(n)|}}{n} = 0\,.$$

y que es *cuasientera* si

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|f(n)|}}{n} < +\infty\,.$$

Si f es entera, entonces la serie de potencias

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!}\, z^n$$

define una función entera, mientras que si f es cuasientera F define una función holomorfa en un disco $\mathbb{D}(0, R)$, con $R > 0$. De hecho, apelando a la fórmula de Stirling, para el radio R se tiene que

$$R = e/\limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|f(n)|}}{n}\,.$$

Para f cuasientera, denotemos por F a la función

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n ,$$

que es holomorfa en un disco $\mathbb{D}(0, R)$. La función F es la *función generatriz exponencial* de f.

Como corolario de la demostración del teorema 2.30 se obtiene:

Corolario 2.31 *Si f es cuasientera, entonces $g = \mathcal{B}(f)$ es cuasientera, y recíprocamente.*

De hecho, si F y G denotan las funciones generatrices exponenciales de f y g respectivamente, se tiene que el radio de convergencia de F y G coinciden. Pongamos que R es ese radio común. Se tiene

$$G(z) = e^z F(-z) , \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(0, R) .$$

Si f es entera entonces $g = \mathcal{B}(f)$ es entera, y recíprocamente.

La simetría de la transformada binómica queda codificada por la relación

$$G(z) = e^z F(-z) ,$$

que equivale a

$$F(z) = e^z G(-z) ,$$

para todo $z \in \mathbb{D}(0, R)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es cuasientera. Para cada entero $N \geq 0$, denotamos por f_N a la truncación de f al nivel N. Sea F_N la función generatriz exponencial de f_N.

Las F_N son las secciones de F. Por tanto, si R es el radio de convergencia de la serie de potencias que define a F entonces $F_N \overset{\mathbb{D}(0,R)}{\Longrightarrow} F$, cuando $N \to \infty$.

Sea $g_N = \mathcal{B}(f_N)$ y sea G_N la función holomorfa en $\mathbb{D}(0, R)$ dada por

$$(\star) \quad G_N(z) = e^z F_N(z) , \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(0, R) .$$

Como hemos observado en la demostración del teorema 2.30,

$$\text{COEF}_{[n]}(G_N) = \frac{g(n)}{n!} , \quad \text{para cada } n \leq N .$$

Como $F_N \overset{\mathbb{D}(0,R)}{\Longrightarrow} F$, cuando $N \to \infty$, se tiene que $G_N \overset{\mathbb{D}(0,R)}{\Longrightarrow} e^z F$ cuando $N \to \infty$. Pero en virtud de $(\star)$, si G_N converge, como es el caso, su límite ha de ser

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{n!} z^n ,$$

es decir, $G_N \overset{\mathbb{D}(0,R)}{\Longrightarrow} G$. Así que

$$G(z) = e^z F(-z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(0,R)\,.$$

Además, la serie de potencias de G tiene radio de convergencia al menos R y la función g es, por consiguiente, cuasientera.

Como f es, por el teorema 2.30, la transformada binómica de g, revirtiendo el argumento, deducimos que el radio de convergencia de F es al menos el de G y, en suma, F y G tiene el mismo radio de convergencia, R.

El caso entero se argumenta de manera análoga. ■

Teorema 2.32 (de incertidumbre para la transformada binómica) *Si la función $f : \widehat{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ y su transformada binómica $g = \mathcal{B}(f)$ tienen ambas soporte finito, entonces f y g son idénticamente nulas.*

demostración. Si los soportes son finitos, las funciones generatrices exponenciales F y G de f y g, respectivamente, son polinomios. Se tiene la identidad

$$G(z) = e^z F(-z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Esta identidad nos dice que o bien $F(-z)$ y $G(z)$ son ambas idénticamente nulas o bien tienen el mismo conjunto finito de ceros, contando multiplicidades. Pero esta segunda opción daría que e^z sería una función racional. ■

C. Transformada de Möbius

Una *función aritmética* es cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$; pura cuestión de nomenclatura.

La transformada de Möbius de la función aritmética f es la función aritmética g dada por

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\,, \quad \text{para } n \geq 1\,.$$

El *teorema de inversión* de la transformada de Möbius nos dice cómo recuperar la función f a partir de g; a saber,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) g(d)\,, \quad \text{para } n \geq 1\,.$$

Resaltamos para su uso inmediato que si f es la función de Möbius μ, entonces su transformada g viene dada por $g(n)$ es $g(n) = 1$ si $n = 1$, y $g(n) = 0$ si $n > 1$, es decir, g es una función delta en 1:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Teorema 2.33 (de incertidumbre para la transformada de Möbius) *Si $f(n)$ y $g(n)$ tienen soporte finito, entonces $f(n)$ y $g(n)$ son idénticamente nulas.*

Este es un resultado de (Paul) Pollack.

En plan místico se tiene como corolario:

Corolario 2.34 *Existen infinitos primos.*

DEMOSTRACIÓN. La mera definición de la función de Möbius $\mu(n)$ nos dice que si sólo hubiera un número finito de primos, entonces la función de Möbius tendría soporte finito. Y recíprocamente.

Pero la transformada de Möbius de la función de Möbius es la delta en 1 que obviamente tiene soporte finito. El teorema 2.33 nos dice entonces que la función de Möbius y la delta en 1 habrían de ser idénticamente 0, lo que es falso. ■

Vamos con la demostración del teorema de Pollack.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.33. Suponemos, como dicta el enunciado, que tanto la función f como su transformada g tienen soporte finito.

Consideremos la serie de potencias

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, z^n\,,$$

que, de hecho, es un polinomio, pues g tiene soporte finito.

Escribimos los $g(n)$ en términos de los $f(d)$ e intercambiamos el orden de integración:

$$(\star)\qquad \begin{aligned} G(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} f(d) z^n \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} f(d) \Big(\sum_{d|n} z^n\Big) = \sum_{d=1}^{\infty} f(d) \sum_{k=1}^{\infty} z^{d\,k} = \sum_{d=1}^{\infty} f(d) \frac{z^d}{1-z^d}. \end{aligned}$$

El intercambio de orden de integración es, obviamente, legal pues ambas, f y g, tienen soporte finito.

La expresión $(\star)$ presenta al polinomio G como una combinación lineal finita de ciertas funciones racionales. Las d-raíces de la unidad para los d tales que $f(d) \neq 0$ se presentan como polos potenciales de G. Veamos.

Si f no es idénticamente nula y tomamos N como el máximo de los $d \geq 1$ tales que $f(d) \neq 0$, entonces $\omega = e^{2\pi\imath/N}$ es un polo de $G(z)$ pues ω es polo de $z^N/(1-z^N)$ y no es polo de los sumandos $z^d/(1-z^d)$ para $d < N$. Así que si la función f no es idénticamente nula, la función G tiene al menos un polo. Pero esto es una contradicción pues, como apuntábamos más arriba, $G(z)$ es un polinomio ya que g tiene soporte finito. ■

2.2.7. Caminos asintóticos. Teorema de Denjoy

En este sección estudiamos los llamados caminos asintóticos de funciones enteras. Comenzamos con su definición.

Definición 2.1 Decimos que $a \in \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}$ es un **valor asintótico** de la función entera f si existe una curva continua $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ tal que

- $\lim_{t\uparrow\infty} \gamma(t) = \infty_{\mathbb{C}}$, alternativamente, $\lim_{t\uparrow\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ y
- $\lim_{t\uparrow\infty} f\big(\gamma(t)\big) = a \in \widehat{\mathbb{C}}$.

De una curva $\gamma(t)$ a lo largo de la cual f tiene un valor asintótico se dice que es un **camino asintótico** de f.

En el caso particular, frecuente y relevante en lo que sigue, en que la curva $\gamma(t)$ es un rayo que emana del origen, $\gamma(t) = te^{\imath\theta_0}$, con $t \geq 0$, de manera que $\lim_{t\uparrow\infty} f\big(te^{\imath\theta_0}\big) = a \in \widehat{\mathbb{C}}$, entonces decimos de γ que es un **rayo asintótico** y que $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ en un **valor asintótico radial**.

Por ejemplo, 0 e $\infty_{\mathbb{C}}$ son valores asintóticos (radiales) de e^z, tomando $\gamma(t) = -t$ y $\gamma(t) = t$, para $t \geq 0$. De hecho, 0 e ∞ son los únicos valores asintóticos de e^z. Veamos. Si $e^{\gamma(t)} \to re^{\imath\theta}$, cuando $t \to \infty$, con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{t\to\infty} \Re(\gamma(t)) = \ln(r)$ y, para un cierto $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\lim_{t\to\infty} \Im(\gamma(t)) = \theta + 2k\pi$ de manera que $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \ln(r) + \theta + 2k\pi$ y no a $\infty_{\mathbb{C}}$.

Fijemos un entero $p \geq 1$. Consideremos la función entera $f_p(z) = \operatorname{sen}(z^p)/z^p$ y consideremos, asimismo, los $2p$ rayos dados por $\gamma_j(t) = te^{\pi\imath j/p}$, para $1 \leq j \leq 2p$

Ahora, como el seno es una función impar, se tiene que $f_p(\gamma_j(t)) = \operatorname{sen}(t^p)/t^p$ que tiene límite 0 cuando $t \uparrow \infty$. De manera que para f_p tenemos $2p$ rayos asintóticos con valor asintótico radial 0.

Sea ahora $g_p(z)$ la función entera tal que $g_p(0) = 0$ y $g_p'(z) = f_p(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. A lo largo de $\gamma_j(t)$, se tiene

$$g_p(\gamma_j(t)) = \int_0^{\gamma_j(t)} \frac{\operatorname{sen}(z^p)}{z^p}\, dz = e^{\pi\imath j/p} \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(t^p)}{t^p} dt\,.$$

Para $p \geq 2$, la integral $\int_0^\infty \operatorname{sen}(t^p)/t^p dt$ es absolutamente integrable. Para $p = 1$ se tiene, como bien sabe el lector, que

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} s}{s} ds = \frac{\pi}{2}\,.$$

En cualquier caso, para entero $p \geq 1$, la función entera $g_p(z)$ tiene $2p$ valores asintóticos radiales finitos distintos.

Esta conspicua familia de ejemplos de las $g_p(z)$ nos vendrá de perlas en breve.

El primer resultado general sobre valores asintóticos es el siguiente teorema de Felix Iversen que afirma que $\infty_{\mathbb{C}}$ es valor asintótico de cualquier función entera.

Teorema 2.35 (Teorema de Iversen) *Sea f una función entera no constante, entonces f tiene a $\infty_{\mathbb{C}}$ como valor asintótico.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada entero $n \geq 0$ denotamos por $H_n = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| > n\}$. Observe, lector, que $H_n \supset H_{n+1}$ para cada $n \geq 0$. Cada H_n es un abierto y puede tener varias componentes (conexas).

La demostración del presente teorema se basa en engarzar estas componentes usando las siguientes dos propiedades.

1) *Cada componente G de H_n es no acotada.*

Si G fuera acotada, entonces en todo ∂G se tendría que $|f| \equiv n$. Por el principio del módulo máximo, como en el teorema 2.3, se deduce que $|f(w)| \leq n$, para todo $w \in G$, pero esto contradice que $G \subset H_n$.

2) *Si G es componente de H_n, entonces $G \cap H_{n+1} \neq \emptyset$.*

Si fuera $G \cap H_{n+1} = \emptyset$, entonces $|f(z)| \leq n+1$ para todo $z \in G$. Pero como para todo $w \in \partial G$ se tiene que $|f(w)| = n$, el principio del módulo máximo para dominios no acotados, teorema 2.15, nos daría que $|f(z)| \leq n$, para todo $z \in G$; de nuevo, contradicción.

Sea ahora G una componente de H_n. Como $G \cap H_{n+1} \neq \emptyset$, tenemos que G corta a una componente digamos F de H_{n+1}. La unión $F \cup G$ es conexa y $(F \cup G) \subset H_n$, así que $(F \cup G) \subset G$, es decir, $F \subset G$.

Esta última observación da lugar a una sucesión $G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ donde cada G_n es componente conexa de H_n.

Construimos a continuación el camino asintótico a lo largo de cual se alcanza el valor asintótico $\infty_{\mathbb{C}}$.

Para cada $n \geq 0$, tomamos un punto de $z_n \in G_n$. A continuación, para cada $n \geq 0$, se toma una curva continua $\gamma_n(t)$, definida para $t \in [n, n{+}1]$ y contenida en G_n (es decir, $\gamma_n[n, n{+}1] \subset G_n$) y de manera que $\gamma_n(n) = z_n$ y $\gamma_n(n{+}1) = z_{n+1}$.

Formamos la concatenación de las γ_n para obtener $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ (es decir, $\gamma(t) = \gamma_n(t)$ si $t \in [n, n{+}1]$). Como $\operatorname{dist}(H_n, 0) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, tenemos que $\lim_{t\to\infty} |\gamma(t)| = +\infty$.

Finalmente, para cada $n \geq 0$ se tiene que $|f(\gamma(t)| > n$, si $t \geq n$, y, en particular, $\lim_{t\to\infty} |f(\gamma(t))| = +\infty$. ■

Nuestro siguiente objetivo es ilustrar la estrecha relación que existe entre cuán rápidamente crece el módulo $|f(z)|$ de una función entera $f(z)$ cuando $|z|$ tiende a ∞ y cuantos valores asintóticos finitos distintos puede llegar a tener f.

El orden $\rho(f)$ de una función entera f se define como el ínfimo de los $\eta \geq 0$ para los que existe $A > 0$ de manera que

$$|f(z)| \leq Ae^{|z|^\eta}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

La función e^z tiene orden 1, y en general, e^{z^k} tiene orden k, para entero $k \geq 1$. El orden de una función entera es un concepto importante del que nos ocuparemos ampliamente más adelante en el capítulo 8.

La función $g_p(z)$, que hemos discutido más arriba, tiene orden exactamente $2p$. La forma más expeditiva de confirmarlo es apelar a su desarrollo en serie de potencias de z:

$$g_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,(2kp+1)}\, z^{2kp+1}$$

y combinar el teorema 8.9, en el que se expresa el orden en términos de los coeficientes de Taylor, con la fórmula de Stirling.

Un (gran) teorema de Lars Ahlfors (también dicho como teorema de (Arnaud) Denjoy, (Torsten) Carleman, (Lars) Ahlfors) afirma que el número de valores asintóticos distintos de una función entera no excede $2\rho(f)$, el doble de su orden.

Las funciones $g_p(z)$ muestran que este resultado es el mejor posible al menos para orden entero $p \geq 1$.

Aquí vamos a conformarnos con demostrar el predecesor de ese resultado de Ahlfors que es debido a Denjoy y que afirma

Teorema 2.36 (Teorema de Denjoy) *Si f es una función entera de orden $\rho = \rho(f)$, entonces f tiene a lo sumo 2ρ valores asintóticos radiales distintos.*

Para la demostración apelaremos al siguiente

Lema 2.37 *Supongamos que f es una función holomorfa en un sector $\mathbb{S}_\delta$, que es continua en $\mathrm{cl}(\mathbb{S}_\delta)$ y que es tal que*

$$(\star) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t\uparrow\infty} f(te^{\imath\pi\delta}) = a \in \mathbb{C}, \\ \lim\limits_{t\uparrow\infty} f(te^{-\imath\pi\delta}) = b \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

y que además cumple que para un $\beta \geq 0$ y $A > 0$ se cumple que

$$(\star\star) \quad |f(z)| \leq Ae^{|z|^\beta}, \quad \textit{para } z \in \ \mathbb{S}_\delta\ .$$

Entonces si $\beta < \pi/(2\delta)$, se tiene que $|f|$ es acotada en $\mathbb{S}_\delta$ y además $a = b$.

demostración. Los límites de $(\star)$ y la continuidad de f en $\mathrm{cl}(\mathbb{S}_\delta)$ garantizan que para una cierta constante M se tiene que

$$|f(w)| \leq M, \quad \text{para todo } w \in \partial\mathbb{S}_\delta\,.$$

La condición ($\star\star$) conjuntamente con que $\beta < \pi/(2\delta)$ y el teorema 2.11 nos dan entonces que $|f|$ está acotada sobre todo $\mathbb{S}_\delta$.

Sea $G(z)$ la transformación holomorfa

$$G(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\delta/\pi}$$

que lleva biholomorfamente el disco unidad $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{S}_\delta$. Si aplicamos el corolario 2.18 a $f(G(z))$ concluiremos finalmente que $a = b$. ∎

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.36 DE DENJOY.

Supongamos que f tiene N valores asintóticos radiales finitos y distintos.

Tenemos necesariamente dos rayos asintóticos con valores asintóticos radiales distintos a y b y que abarcan un sector Γ (rotación de un $\mathbb{S}_\delta$) de amplitud 2δ que no excede $2\pi/N$, es decir, tal que $\delta \le \pi/N$.

Si $\eta > \rho(f)$ se tiene que $|f(z)| \le Ae^{|z|^\eta}$, para una cierta constante $A > 0$ y para todo $z \in \mathbb{C}$.

El lema 2.37 nos dice que si fuera $\eta < \pi/(2\delta)$ tendría que ser $a = b$, que no es el caso. Por consiguiente,

$$\eta \ge \frac{\pi}{2\delta} \ge \frac{N}{2}\,.$$

De manera que $N \le 2\eta$, y como esto es cierto para todo $\eta > \rho$, concluimos que $N \le 2\rho$. ∎

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2

MÓDULO MÁXIMO

2.2.1 *Demuéstrese (a partir del principio del módulo máximo de funciones holomorfas) que si u es una función armónica (real) en un dominio Ω que tiene un máximo local o un mínimo local en $z_0 \in \Omega$, entonces u es constante.*

$\Rightarrow$ SUGERENCIA: 1) Considérese la función $g = e^{u+i\,v}$ en $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$, donde v es armónica conjugada de u en ese disco. 2) Considérese la función f definida en Ω mediante $f(z) = \partial_x u(z) - i\partial_y u(z)$.

2.2.2 *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y f, g funciones holomorfas en Ω y continuas en $\mathrm{cl}(\Omega)$. Demuéstrese que:*

I) *Si $|f(z)| = |g(z)|$ para todo $z \in \partial\Omega$ y, además, $f(z)\cdot g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathrm{cl}(\Omega)$, entonces para una constante c, con $|c| = 1$ se tiene que $f(z) = cg(z)$ para todo $z \in \mathrm{cl}(\Omega)$.*

II) *Si $\Re f(z) = \Re g(z)$ para todo $z \in \partial\Omega$, entonces para un cierto $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(z) = g(z) + i\alpha$ para todo $z \in \mathrm{cl}(\Omega)$.*

2.2.3 *Sean $f(z) = 1 - z$ y*

$$g(z) = \begin{cases} (1-z)\cdot \exp\Big(\dfrac{z+1}{z-1}\Big), & \text{si } z \neq 1, \\ 0, \quad \text{si } z = 1. \end{cases}$$

Demuéstrese que f, g son holomorfas en $\mathbb{D}$ y continuas en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y que $f(z), g(z)$ no se anulan para $|z| < 1$. ¿Tienen ceros en la frontera del disco $\mathbb{D}$?

Compruébese que $|f(z)| = |g(z)|$ en $\partial\mathbb{D}$, y sin embargo, la conclusión del ejercicio (i) del ejercicio anterior no se cumple.

2.2.4 *Demuéstrese que si f es holomorfa en $|z| < 1$ y $|f(z)| \leq 1-|z|$ en $\mathbb{D}$, entonces $f \equiv 0$. ¿Puede una función holomorfa satisfacer $|f(z)| \geq 1/(1-|z|)$ para todo $z \in \mathbb{D}$? ¿Y $|f(z)| \geq 1 - |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$?*

PHRAGMÉN–LINDELÖF

2.2.5 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $|g|$ está* está acotado *en todo $\mathbb{D}$ sea A un subconjunto finito de $\partial\mathbb{D}$. Supóngase que*

$$\limsup_{z\in\mathbb{D};\, z\to w} |f(z)| \leq M\,, \quad \text{para todo } w \in \partial\mathbb{D} \setminus A\,.$$

Dedúzcase que

$$|f(z)| \leq M\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

∞ Y FUNCIONES ENTERAS

2.2.6 *Pruébese que si una función entera f satisface que*

$$f(z+1) = f(z+i) = f(z)\,,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es una función constante.

SUGERENCIA: Úsese el teorema de Liouville.

2.2.7 *Sea f una función entera. Demuéstrese que:*

i) *Si f verifica*

$$|f(z)| \leq M|z|^{\alpha}, \quad \textit{para} \quad |z| > R\,,$$

con $M, R, \alpha > 0$, entonces f es un polinomio de grado menor o igual que α.

ii) *Si f verifica*

$$|f(z)| \leq |ze^z|, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

entonces $f(z) = aze^z$ con a una constante, $|a| \leq 1$.