[Los problemas con un número entre corchetes están adaptados de los correspondientes en los apuntes de José Luis Fernández]

1) Halla $f_n : \Omega = \{z : \Re(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos de Ω pero que no converja uniformemente en todo Ω.

2) [5.6.3] Para $f_n(z) = \tan(nz)$, estudia si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre los compactos del semiplano inferior $\{\Im(z) < 0\}$.

3) [5.6.1] Demuestra que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (holomorfas en Ω) converge uniformemente en cada circunferencia incluida en Ω a cierta $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, entonces $f_n \rightrightarrows f$ sobre cualquier compacto en Ω. Indicación: Utiliza la fórmula integral de Cauchy.

4) Prueba que $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{n/z}$ es holomorfa en $\{\Re(z) < 0\}$ y halla $F(-1)$.

5) Prueba que si $|a_n| \le \log^{2018} n$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ converge y define una función holomorfa en $\{\Re(z) > 1\}$.

6) Halla $f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos de modo que cada f_n tenga algún cero en $\mathbb{D}$ y que f no tenga ninguno. Indicación: Haz que los ceros de las f_n vayan hacia $\partial\mathbb{D}$.

7) Prueba $\zeta(-1) = -1/12$ aplicando $\operatorname{Res}\big(z^{-2}(e^z - 1)^{-1}, 0\big) = 1/12$ a la integral sobre C_δ. Si uno utilizase la serie, esto daría el absurdo $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -1/12$ que es una fórmula que envió Ramanujan a un matemático como uno de sus descubrimientos.

8) Demuestra la fórmula $\zeta(s) = s/(s-1) - s\int_1^{\infty} x^{-s-1}\operatorname{Frac}(x)\, dx$ donde Frac es la parte fraccionaria y explica por qué prueba la extensión meromorfa a $\Re(s) > 0$ con un único polo en $s = 1$. Indicación: Integra en $[n, n+1]$ y usa $\sum n(n+1)^{-s} = \sum(n+1)^{1-s} - \sum(n+1)^{-s}$.

9) Integrando por partes prueba $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Halla también una fórmula simple para el residuo de $\Gamma(s)$ en $s = -2018$.

10) En la identidad $\Gamma(s)\int_0^{\infty} x^{w-1}(1+x)^{-s}\, dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{w-1}(1+x)^{-s} y^{s-1} e^{-y}\, dxdy$, haz el cambio $x = u/v$, $y = u+v$ para deducir que es igual a $\Gamma(s-w)\Gamma(w)$ con $\Re(w), \Re(s-w) > 0$.

11) [5.6.12] Demuestra que si $\mathcal{F}$ es una familia normal, entonces $\mathcal{F}' = \big\{f' : f \in \mathcal{F}\big\}$ también lo es y busca un contraejemplo para el recíproco.

12) Dada f entera y $a \in \mathbb{C}$ arbitrario, considera la familia $\mathcal{F} = \big\{f(a+nz) : n \in \mathbb{Z}^+\big\}$. Utilizando el teorema de Montel y el ejercicio anterior deduce que si f estuviera acotada entonces $f'(a) = 0$, consiguiendo de esta manera una prueba enrevesada del teorema de Liouville.

13) [5.6.14] Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $|f^{(n)}(0)| < 2018$ (por ejemplo la exponencial). Demuestra que $\mathcal{F}$ es una familia normal. Indicación: Piensa en su serie de Taylor.