[Los problemas con un número entre corchetes están adaptados de los correspondientes en los apuntes de José Luis Fernández]

1) Prueba que la aplicación $z \mapsto (az+b)/(\bar{b}z+\overline{a})$ con $|a|>|b|$ define una biyección de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. ¿Por qué es necesaria la condición $|a|>|b|$?

2) Demuestra que con la composición de funciones, Möb($\mathbb{D}$) es grupo no conmutativo.

3) Prueba que las transformaciones de Möbius satisfacen $\left|\frac{T(z)-T(w)}{1-T(z)\overline{T(w)}}\right| = \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|$.

4) Halla $\rho\big((-2018/3+i)/(i/3+2018), i/2018\big)$ haciendo pocos cálculos.

5) Bajo las hipótesis del lema de Schwarz, prueba que si f deja algún punto de $\mathbb{D}$ fijo, entonces es la función identidad $f(z)=z$.

6) [4.8.1] Prueba que si $f:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ fija dos puntos entonces es la identidad. Indicación: Intenta reducirlo al caso en que uno de los puntos es el origen.

7) Comprueba que la transformación $T(z)=(z-1)/(z+1)$ aplica $\{\Re(z)>0\}$ en $\mathbb{D}$ de manera biyectiva.

8) Para $f:\mathbb{D}\longrightarrow\{\Re(z)>0\}$ holomorfa prueba $(1-|w|^2)|f'(w)|\le 2\Re\big(f(w)\big)$ para $w\in\mathbb{D}$. Indicación: Usa una transformación que pase w a 0 en el argumento del Corolario 3.4.

9) Halla un disco como el que asegura el teorema de Bloch para la función $f(z)=(z^2+z)/2$.

10) [4.8.11] Considerando las funciones $f_n(z)=\big(e^{nz}-1\big)/n$ con $n\in\mathbb{Z}^+$, comprueba que el teorema de Bloch dejaría de ser cierto si en la conclusión se pide que el disco esté centrado en $f(0)$ aunque el radio se rebaje a $\epsilon|f'(0)|$ con $\epsilon>0$ cualquier constante positiva fijada.

11) [4.8.13] Sabiendo que no existen funciones enteras no constantes f y g verificando $e^f+e^g=1$, deduce el teorema pequeño de Picard. Indicación: Si F fuera un contraejemplo que no alcanza ni 0 ni 1, se podría escribir $F=e^f$.

12) Prueba el teorema pequeño de Picard meromorfo, esto es, si f es no constante y meromorfa en $\mathbb{C}$ entonces su imagen es todo $\mathbb{C}$ o todo $\mathbb{C}$ menos uno o dos puntos. Indicación: Si 0 no está en la imagen de f, ¿qué ocurre con $1/f$?

13) Encuentra una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuya imagen sea $\mathbb{C}-\{1/2, 2018\}$.

14) Sabemos que $f^n+g^n=1$, tiene solución en funciones enteras para $n=2$ (el seno y el coseno). Aplicando el teorema pequeño de Picard a $F=g/(f-cg)$ con $c=\exp(2\pi i/n)$, deduce que no hay soluciones no constantes para $n>2$. Indicación: ¿Están $(c^k-c)^{-1}$ en la imagen?

15) Encuentra una función holomorfa en $\mathbb{C}-\{0\}$ que tenga una singularidad esencial en el origen y que alcance el valor 2018 exactamente una vez.