[La notación es como la empleada en clase[1]]

1) Sea la elipse $E:\ x^2/a^2+y^2/b^2=1$ con $a>b>0$. Prueba que la longitud del arco en E que une $(0,b)$ con (x_0,y_0), $x_0,y_0>0$, viene dada por una integral elíptica del tipo $\int_0^{x_0/a} f(t)\,dt$ con $f(t)=a(1-k^2t^2)/\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ para cierto $0<k<1$.

2) Según la conservación de la energía, la evolución del ángulo $\alpha=\alpha(t)$ de un péndulo simple con $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=1$, viene dada por $2(\alpha')^2-k^2\cos\alpha=2-k^2$ donde k es una constante que depende de la longitud del péndulo (concretamente $k=2\sqrt{g/l}$). Con el cambio $x=\sin(\alpha/2)$, deduce $t=\int_0^x f(u)\,du$ con $f(u)=2/\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$.

3) Demuestra que si f es una función meromorfa sin ceros ni polos en el borde de un paralelogramo $\mathcal{P}$, entonces $\int_{\partial\mathcal{P}} f'/f=2\pi i(Z-P)$ con Z y P la cantidad de ceros y polos en $\mathcal{P}$ contando multiplicidades.

4) Prueba que no existe ninguna función meromorfa no constante que cumpla $f(z)=f(z+1)=f(z+\sqrt{2})$.

5) Sea f meromorfa y no idénticamente nula tal que $f(z+m\omega_1+n\omega_2)=e^{(\alpha m+\beta n)z}f(z)$ para ciertos $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ fijados. Prueba que $\big(f''f-(f')^2\big)/f^2$ es una función elíptica. Indicación: Se puede abreviar bastante expresándola como una derivada.

6) Halla todas las soluciones de la ecuación $\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(z-m-ni)^{-3}=0$. Indicación: Comprueba que $z=1/2$, $i/2$, $(1+i)/2$ son soluciones, ¿hay más?

7) ¿Existen A y B tales que $\wp''(z)=A\big(\wp(z)\big)^2+B$? En caso afirmativo halla A y en caso negativo explica por qué.

8) Para $\omega_1=1$, $\omega_2=i$, demuestra que $\sum_{\omega\in\Lambda^*}|\omega|^{-2}$ no converge. Indicación: Hay muchas formas de proceder, una de ellas pasa por notar que $|m+ni|\le 2m$ si $m\ge n>0$.

9) Escribe $\wp'''$ en términos de $\wp'$ y de $\wp$.

10) Explica con detalle cómo se obtiene $\theta(z+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi iz}\theta(z)$.

11) Si $R=R(z)$ es una racional par, comprueba que $R\big(\theta(z+1/2)/\theta(z)\big)$ es una función elíptica.

12) Comprueba que $e^{-2\pi iz}\theta^2(z)/\theta^2(z+\tau^*)$ es una función elíptica y que $e^{-\pi iz}\theta(z)/\theta(z+\tau^*)$ no lo es.

[1] Se recuerda
$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2\pi inz},\qquad q=e^{\pi i\tau},\qquad \Im\tau>0,\qquad \tau^*=(1+\tau)/2.$$

13) Dado $P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+q^{2n-1}e^{2\pi iz}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{-2\pi iz}\big)$, explica con detalle cómo se obtiene $P(z+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi iz}P(z)$.

14) Para $P(z)$ como antes, prueba sus ceros son de la forma $\tau^*+m+n\tau$ con $m,n\in\mathbb{Z}$ y son todos simples. Indicación: Puedes dar por hecho que un producto infinito de los factores de P no es nulo si alguno de ellos no se anula (esto se debe a que $q^{2n-1}\to 0$ muy rápido).

15) Deduce la identidad $\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-q^{2n}\big)\big(1+q^{2n}\big)^2$ a partir de la fórmula del triple producto de Jacobi. Indicación: ¿Qué relación guarda $\theta(\tau/2)$ con el primer miembro?

16) Sean $f(z)=\theta(z+1/2)$ y $g(z)=e^{\pi iz}\theta(z+\tau^*)$. Estudia si son pares, impares o ninguna de las dos cosas.

17) Eligiendo z y τ tales que $e^{2\pi iz}=-x^{1/2}$ y $q=x^{3/2}$ para un $0<x<1$ dado, deduce de la fórmula del triple producto de Jacobi la identidad $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n x^{n(3n+1)/2}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$, llamada *teorema de los números pentagonales*, obtenida por Euler con métodos combinatorios.

18) Si una función meromorfa no constante tiene tres periodos ω_1, ω_2 y ω_3, prueba que necesariamente $a\omega_1+b\omega_2+c\omega_3=0$ para ciertos $a,b,c\in\mathbb{Z}$ no todos nulos. Indicación: Fijados $\lambda_j\in\mathbb{R}$ con $\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\omega_j=0$, por cada $k\in\mathbb{Z}^+$ hay un periodo $p_k=\sum_{j=1}^{3}A_{jk}\omega_j$ donde A_{jk} es el entero más cercano a $k\lambda_j$, que satisface $|p_k|\le|\omega_1|+|\omega_2|+|\omega_3|$. ¿Por qué no puede haber infinitos periodos distintos en una bola?

19) Demuestra que $\wp(\omega_1/2)$ y $\wp(\omega_2/2)$ son raíces de la ecuación $4z^3-20a_2z-28a_4=0$ donde $z^{-2}+a_2z^2+a_4z^4+\dots$ es el desarrollo de Laurent de $\wp$.

20) Si los a_{2k} son como antes prueba $a_2^2=3a_6$. Indicación: Piensa primero el ejercicio que habla de $\wp''(z)=A\big(\wp(z)\big)^2+B$.