1) Sean $u_+ = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ y $u_- = x^2 - y^2 + 2x - 2y$. Estudiar si existen funciones enteras f_+ y f_- tales que $\Re f_\pm(x+iy) = u_\pm(x,y)$. Si alguna de ellas existe, escribe una fórmula explícita.

2) Halla el desarrollo de Taylor de $f(z) = \frac{z}{z^4+2}$ centrado en $z_0 = 0$. ¿Cuál es su radio de convergencia?

3) Halla una fórmula explícita para la función entera definida por $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{n^3}{n!} z^n$ y usa el resultado para calcular $\frac{n^3}{n!}$. Indicación: Escribe n^3 como $An(n-1)(n-2) + Bn(n-1) + Cn$.

4) Si f es meromorfa con un polo de orden N en z_0, ¿cuál es el residuo de f'/f en z_0?

5) Calcula el residuo $\operatorname{Res}(f, i)$ de la función $f(z) = (z^2+1)^{-2}$.

6) Calcula c_{-1}, c_0 y c_1, en el desarrollo de Laurent $c_{-1}/z + c_0 + c_1 z + \dots$ de $f(z) = (e^z - 1)^{-1}$.

7) Calcula $\int_C f(z)\, dz$ para $f(z) = (z^2 + az + 1)^{-1}$ donde $a > 2$ y C es la circunferencia unidad.

8) Evalúa $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^4+a^4}\, dx$ donde $a = \pi k\sqrt{2}$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ utilizando el teorema de los residuos. Indicación: Para simplificar los cálculos es conveniente notar que $e^{i(\pm 1+i)\pi k} = e^{-\pi k}(-1)^{k-1}$ y $(1+i)^{-3} + (-1+i)^{-3} = -i/2$.

9) Usando $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}\big(e^{it} - 1/e^{it}\big)$ y $dt = d\big(e^{it}\big)/(ie^{it})$, escribe $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\operatorname{sen} t}$ como $\int_C f(z)\, dz$ donde C es la circunferencia unidad y f una función meromorfa. Evalúa con ello la integral.

10) Deduce del teorema de Rouché que las 11 soluciones de $z^{11} + z^4 - z^3 + z - 2018 = 0$ están en el círculo $\{|z| < 2\}$.

11) Si f es holomorfa en un abierto $\mathcal{U} \supset \overline{D}$ y no se anula en D, prueba que el mínimo de $|f(z)|$ en $\overline{D}$ se alcanza en la frontera ∂D. Es decir, que también hay un *principio del módulo mínimo* si no hay ceros.

12) Prueba que si una función entera satisface $|f(z)| < C|z|^n$ para cierta constante C, entonces es un polinomio. Indicación: Considera $f(z)/z^n$ y réstale algo para que sea entera y se pueda aplicar el teorema de Liouville. Otra posibilidad es usar la fórmula integral de Cauchy para $f^{(n+1)}$.

13) Prueba que no existe ninguna función entera f que satisfaga la ecuación funcional $f(z^4) - f(z) = 2018z$. Indicación: Halla su desarrollo en serie de potencias y muestra que su radio de convergencia es finito.

14) Sabiendo que la función $f(z) = z^{-2}\big(e^{2\pi i z} - 1\big)^{-1}$ cumple $\operatorname{Res}(f, 0) = i\pi/6$, aplica el teorema de los residuos a $\int_{\partial D} f(z)\, dz$ donde D es el cuadrado $|x| < N + 1/2$, $|y| < N + 1/2$ con N entero $N \to +\infty$ para obtener $\sum_{n=1}^\infty n^{-2} = \pi^2/6$.