Examen final 25/May/2018 Variable Compleja II

Nombre y apellidos ....

1) Sea el polinomio $P(z) = 3z^2 + z^3 + iz^7$.
a) [1 punto] Calcula el residuo de $1/P(z)$ en $z = 0$.
b) [1 punto] Halla el número de soluciones de $P(z) = z/2018$ en $\mathbb{D}$.

2) [2 puntos] Estudia si $f_1(z) = e^{-2\pi iz}\theta^2(z)/\theta^2(z+\tau^*)$ es una función elíptica con periodos 1 y τ, donde $\tau^* = (1+\tau)/2$.

3) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.
a) [1 punto] Existe una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que no alcanza los valores ni cero ni uno.
b) [1 punto] La función $f(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ tiene un polo simple en $s = 0$.

4) [2 puntos] Prueba que la sucesión $\{\tan(nz)\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre compactos en el semiplano inferior $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}$.

5) [2 puntos] Encuentra una transformación de Möbius que establezca una biyección conforme de la corona $\mathbb{D} \cap \{|z| > 1/3\}$ en $\mathbb{D} \cap \{|z - 3/10| > 3/10\}$.

Algunas definiciones y fórmulas: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda^*}\Big(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big), \quad (\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \quad \text{con} \quad g_2 = 60\sum_{\omega\in\Lambda^*}\omega^{-4},\ g_3 = 140\sum_{\omega\in\Lambda^*}\omega^{-6}$$

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2\pi inz} = \prod_{n=1}^{\infty}\big(1-q^{2n}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{2\pi iz}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{-2\pi iz}\big) \quad \text{con} \quad q = e^{\pi i\tau}, \quad \Im\tau > 0$$

$$\theta(z+\tau) = q^{-1}e^{-2\pi iz}\theta(z) \qquad \text{y} \qquad \wp(z;1,\tau) = A_\tau\frac{\theta^2(z+1/2)}{e^{2\pi iz}\theta^2(z+\tau^*)} + B_\tau = -\Big(\frac{\theta'(z+\tau^*)}{\theta(z+\tau^*)}\Big)' + C_\tau.$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \text{para } \Re(s) > 0 \qquad \text{y} \qquad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{para } s \notin \mathbb{Z}_{\le 0}.$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \quad \text{para } \Re(s) > 1 \qquad \text{y} \qquad \zeta(s) = \frac{i}{2\Gamma(s)\operatorname{sen}(\pi s)}\int_{C_\delta}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\,dz \quad \text{para } s \notin \mathbb{Z}$$

donde C_δ, con $0 < \delta < 2\pi$ arbitrario, es una curva con forma de "cerradura" que viene desde $+\infty + i\delta$, rodea al origen y se dirige a $+\infty - i\delta$.
