Enunciado

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [2 puntos] Si una sucesión de funciones holomorfas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f sobre compactos de $\mathbb{D}$ y cada f_n tiene al menos un cero, entonces f tiene al menos un cero.

b) [2 puntos] [**Elige solo uno, el que prefieras**]

- La función $F(s) = \zeta'(s)/\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$.
- La familia $\mathcal{F} = \big\{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} \text{ tal que } |(1-z)f(z)| < 2018\big\}$ es normal.

2) [3 puntos] Calcula el residuo de $f(s) = \big(\Gamma(s)\big)^2 \operatorname{sen}(\pi s)$ en $s = -1$.

3) [3 puntos] Encuentra una aplicación conforme biyectiva $f : \big\{ -\frac{1}{2} < \Re(z) < \frac{1}{2}\big\} \longrightarrow \mathbb{D}$.

Solución

1) a) (F) Por ejemplo, cada $f_n(z) = z-1+1/n$ tienen un cero $1-1/n \in \mathbb{D}$ pero su límite es $f(z) = z-1$ que no tiene ceros en $\mathbb{D}$. La convergencia es uniforme porque $|f_n(z) - f(z)| = 1/n$ que tiende a cero.

b1) (V) Sabemos que $\zeta(s)$ tiene un único polo simple en $s = 1$ con residuo 1, entonces $\zeta(s) = (s-1)^{-1}+a_0+a_1(s-1)+a_2(s-1)^2+\dots$. Por tanto $\zeta'(s) = -(s-1)^{-2}+a_1(s-1)+2a_2(s-1)+\dots$ y $\zeta'(s)/\zeta(s) = -(s-1)^{-1} + \dots$ así que hay un polo simple con residuo -1.

b2) (V) Cada compacto $K \subset \mathbb{D}$ tendrá cierta distancia $\delta_0 > 0$ a $\partial\mathbb{D}$ porque K y $\partial\mathbb{D}$ son compactos disjuntos. Entonces $|1-z| \ge \delta_0$ para cada $z \in K$. En particular $|f(z)| \le 2018/\delta_0$ para cada $f \in \mathcal{F}$ y $z \in K$. Según el teorema de Montel, esto asegura que la familia es normal.

2) Se cumple $\Gamma(s) = \Gamma(s+2)/\big(s(s+1)\big)$, por tanto $f = f_1 f_2$ con $f_1(s) = \Gamma^2(s+2)/s^2$ y $f_2(s) = (s+1)^{-2} \operatorname{sen}(\pi s)$. En $s = -1$, f_1 no tiene singularidad, $f_1(-1) = 1$, y f_2 tiene un polo de orden 1 con $\operatorname{Res}(f_2, -1) = \lim_{s\to-1}(s+1)^{-1} \operatorname{sen}(\pi s) = -\pi$ por la regla de L'Hôpital. Entonces $\operatorname{Res}(f, -1) = -\pi$.

3) La función $f_1(z) = i\pi z$ gira la banda a $\big\{-\frac{\pi}{2} < \Im(z) < \frac{\pi}{2}\big\}$. La función $f_2(z) = e^z$ aplica esta banda en la región con módulo positivo y argumento en $(-\pi/2, \pi/2)$, es decir, en $\big\{\Re(z) > 0\big\}$. Finalmente $f_3(z) = (z-1)/(z+1)$ aplica este semiplano en $\mathbb{D}$ porque $f_3(1) = 0 \in \mathbb{D}$ y está claro que todos los del eje vertical se aplican en la circunferencia. Entonces una posible solución es $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, esto es, $f(z) = (e^{i\pi z} - 1)/(e^{i\pi z} + 1)$.

Las funciones f_1 y f_3 están en $\text{Möb}(\mathbb{C})$ y por tanto son inyectivas. También f_2 lo es en la banda tomada como dominio porque el argumento está especificado sin ambigüedad. Como f

es inyectiva y holomorfa, es conforme, además por construcción es sobreyectiva (el dominio de cada función se toma como la imagen de la anterior).

Criterios de corrección y comentarios

1) a) Por si alguien tiene curiosidad, $f_n(z) = (z-1+1/n)/(z-1)$ cumple $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos, con $f = 1$, pero la función límite no tiene ningún cero en la frontera de $\mathbb{D}$. Así que no es cierto que el cero reaparezca en la frontera.

b) El teorema de Montel da una equivalencia con la acotación de una familia en cada compacto contenido en el dominio pero no con la acotación en todo el dominio en sí.

Mencionar el teorema de Montel pero justificar mal su aplicación cuenta casi siempre 0.5.

2) Una duda común es pensar que el polo es doble. Es un hecho general que polo doble por cero simple da polo simple, piensa en $z^{-2} \cdot z = z^{-1}$. La aplicación correcta de $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ la puntúo con 0.5 aunque no se llegue al resultado final.

3) Comprobar que era biyección (lo que implica conforme) era sencillo y material más bien de Variable Compleja I, por ello no penalizo no hacerlo ni decir algo incorrecto al respecto. Por alguno razón algunos pensáis que $T(z) = (z-1)/(z+1)$ aplica la banda $\{0 < \Re(z) < 1\}$ en $\mathbb{D}$. Eso no es así y en fácil verlo porque como T no tiene polos en las fronteras de la banda, aplica cada una en una circunferencia (distinta por la inyectividad). Este error descuenta un punto.