Segundo parcial 14/May/2018 Variable Compleja II

Nombre y apellidos ....

....

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [2 puntos] Si una sucesión de funciones holomorfas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f sobre compactos de $\mathbb{D}$ y cada f_n tiene al menos un cero, entonces f tiene al menos un cero.

b) [2 puntos] [**Elige solo uno, el que prefieras**]

- La función $F(s) = \zeta'(s)/\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$.
- La familia $\mathcal{F} = \big\{f$ holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $|(1-z)f(z)| < 2018\big\}$ es normal.

2) [3 puntos] Calcula el residuo de $f(s) = \big(\Gamma(s)\big)^2 \operatorname{sen}(\pi s)$ en $s = -1$.

3) [3 puntos] Encuentra una aplicación conforme biyectiva $f : \big\{ -\frac{1}{2} < \Re(z) < \frac{1}{2}\big\} \longrightarrow \mathbb{D}$.

Algunas formulas

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \text{para } \Re(s) > 0 \qquad \text{y} \qquad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{para } s \notin \mathbb{Z}_{\le 0}.$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{para } \Re(s) > 1 \qquad \text{y} \qquad \zeta(s) = \frac{i}{2\Gamma(s)\operatorname{sen}(\pi s)} \int_{C_\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\,dz \quad \text{para } s \notin \mathbb{Z}$$

donde C_δ, con $0 < \delta < 2\pi$ arbitrario, es una curva con forma de "cerradura" que viene desde $+\infty + i\delta$, rodea al origen y se dirige a $+\infty - i\delta$.

SEGUNDO PARCIAL 14/MAY/2018 VARIABLE COMPLEJA II

Name ....

....

1) Decide whether the following claims are true or false writing in each case a brief justification

a) [2 points] If a sequence of holomorphic functions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly on compact subsets of the unit disk $\mathbb{D}$ to f and every f_n has at least a zero, then f has also at least a zero.

b) [2 points] [**Choose only one, the one you prefer**]

- The function $F(s) = \zeta'(s)/\zeta(s)$ has a simple pole at $s = 1$.
- The family $\mathcal{F} = \big\{f \text{ holomorphic on } \mathbb{D} \text{ such that } |(1-z)f(z)| < 2018\big\}$ is normal.

2) [3 points] Compute the residue of $f(s) = \big(\Gamma(s)\big)^2 \sin(\pi s)$ at $s = -1$.

3) [3 points] Find a bijective conformal map $f : \big\{ -\frac{1}{2} < \Re(z) < \frac{1}{2}\big\} \longrightarrow \mathbb{D}$.

Some formulas

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx \quad \text{for } \Re(s) > 0 \qquad \text{and} \qquad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{for } s \notin \mathbb{Z}_{\le 0}.$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{for } \Re(s) > 1 \qquad \text{and} \qquad \zeta(s) = \frac{i}{2\Gamma(s)\sin(\pi s)} \int_{C_\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz \quad \text{for } s \notin \mathbb{Z}$$

where C_δ, with $0 < \delta < 2\pi$, is a "keyhole" curve coming from $+\infty + i\delta$, encircling the origin and going to $+\infty - i\delta$.