Enunciado

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [2 puntos] La sucesión de funciones $f_n(z) = (1 + nz)z^n$ converge uniformemente sobre compactos en el disco unidad.

b) [2 puntos] Si $f(z) = 1 - \sqrt{1+z}$ entonces $(f \circ f \circ f \circ f)(\mathbb{D})$, con $\mathbb{D}$ el disco unidad, contiene un disco de radio $1/2018$. (Se elige la raíz con $\sqrt{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+$ como es habitual).

2) [3 puntos] Sea T una transformación de Möbius del disco que verifica $T(1/2) = 0$ y $T(1/4) = 2i/7$. Calcula $T(0)$.

3) [3 puntos] Demuestra que no existen funciones enteras no constantes f y g verificando la relación $e^{\cos f} + e^{2g} = 2018$.

Solución

1) a) (V) Cualquier compacto $K \subset \mathbb{D}$ cumple $K \subset \mathbb{D}_r$ donde $\mathbb{D}_r$ es un disco centrado de cierto radio $r < 1$. Esto se deduce de que $\bigcup_{r<1} \mathbb{D}_r$ es un recubrimiento de K porque la unión es todo $\mathbb{D}$. Entonces $\sup_{z\in K} \left|(1 + nz)z^n\right| \le (1 + nr)r^n$. Como $(1 + nr)r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se sigue $f_n \rightrightarrows 0$ en K.

b) (V) Abreviemos $f^{[k]} = f \circ \overset{k \text{ veces}}{\cdots} \circ f$. Se tiene $\big(f^{[4]}\big)' = f'\big(f^{[3]}\big) f'\big(f^{[2]}\big) f'\big(f^{[1]}\big) f'$, por la regla de la cadena. Como $f(0) = 0$ también $f^{[k]}(0) = 0$ y de $f'(0) = -1/2$ y la expresión anterior se sigue $\big(f^{[4]}\big)'(0) = 1/2^4$. Por el teorema de Bloch hay un disco de radio $1/64$, en particular lo hay también de radio $1/2018$.

2) Los elementos de $\text{Möb}(\mathbb{D})$ son de la forma $T(z) = e^{i\alpha}(z - a)/(1 - \overline{a}z)$. De $T(1/2) = 0$ se sigue $a = 1/2$ y entonces $T(1/4) = 2i/7$ impone $e^{i\alpha}(1/4 - 1/2)/(1 - 1/8) = 2i/7$. Despejando, $e^{i\alpha} = -i$ y $T(0) = (-i)(-a) = i/2$.

3) Sea la función entera $G = e^{2g}$, $0 \notin G(\mathbb{C})$ porque la exponencial no se anula nunca. Como $2018 - G = e^{\cos f}$ también se tiene $2018 \notin G(\mathbb{C})$. Por tanto G es una constante, debido al teorema pequeño de Picard, lo cual implica g constante.

Criterios de corrección y comentarios

1) a) La prueba completa cuenta 2, si solo se prueba la convergencia puntual 1 y en el resto de los casos 0.

b) Por alguna razón, un error repetido ha sido considerar $(|f'(0)|/4)^4$ en vez de $\big(f^{[4]}\big)'(0) = (f'(0))^4/4$. Eso descuenta un punto. Aunque no sea muy ortodoxo, escribir la fórmula completa para $f^{[4]}$ y derivarla es válido, si no hay errores en la derivada.

2) Como está claro en la solución, las S_w definidas en el curso, no dan todas las transformaciones de $\text{Möb}(\mathbb{D})$.

3) No se puede dar por hecho que $e^f + e^g = 1$ no tiene solución en enteras no constantes porque eso es casi lo mismo que el problema. Muchos hacéis argumentos no concluyentes. La solución es breve y he sido exigente con el rigor.

---

4) [Solo si tuviste menos de 5 en el primer parcial. Añade hasta dos puntos a su calificación] Calcula el residuo en 0 de $f(z) = (\cos z + \operatorname{sen} z)/\operatorname{sen}^2 z$.

Escribir una fórmula o procedimiento correctos para hacer el cálculo cuenta 0.5.

Muchos os metéis en unos cálculos muy complicados con límites. Ilustro las dudas con dos ejemplos de variable real: Nadie debería tratar de calcular $L_1 = \lim_{x\to 0} x^{100}/\operatorname{sen}^{100} x$ aplicando directamente L'Hôpital porque habría que derivar 100 veces. Lo natural es escribir $L_1 = \big(\lim_{x\to 0} x/\operatorname{sen} x\big)^{100}$. Para hallar $L_2 = \lim_{x\to 0} e^x(2+\arctan x)x/\operatorname{sen} x$ es mejor escribirlo como $L_2 = 2\lim_{x\to 0} x/\operatorname{sen} x$ porque el límite del producto es el producto de límites. La regla de L'Hôpital es poco útil si uno deriva muchas veces o funciones muy complicadas.

$\boxed{\text{Sol. 1 (rápida)}}$ La función $\cos z/\operatorname{sen}^2 z$ es par, por tanto, de la forma $a_{-2}/z^2 + a_0 + a_2 z^2 + \dots$ y $1/\operatorname{sen} z = 1/z + \dots$, por tanto el residuo de la suma es uno.

$\boxed{\text{Sol. 2 (con series)}}$ La función es de la forma $f(z) = a/z^2 + b/z + \dots$ y queremos hallar b, entonces $\cos z + \operatorname{sen} z = (a/z^2 + b/z + \dots)\operatorname{sen}^2 z$. Sustituyendo sus series de Taylor $\cos z + \operatorname{sen} z = 1 + z - z^2/2 + \dots$ y $\operatorname{sen}^2 z = (1-\cos(2z))/2 = z^2 - z^4/3 + \dots$, los términos de orden 0 dan $1 = a$ y los de orden 1, $1 = b$.

$\boxed{\text{Sol. 3 (con derivadas)}}$ La fórmula $\lim_{z\to 0}\big(z^2 f(z)\big)'$ y sus generalizaciones no son muy aconsejables para calcular residuos porque las derivadas n-ésimas suelen ser complicadas. Una manera de proceder es desarrollar $f(z)$ en serie, pero esto es como dar un rodeo para aplicar la solución anterior: $\lim_{z\to 0}\big(z^2 f(z)\big)' \underset{\text{Sol.2}}{=} \lim_{z\to 0}\big(z^2(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \dots)\big)' = \lim_{z\to 0}\big(1 + z + \dots\big)' = 1$.

Indico cómo se harían los cálculos sin series. Para abreviar escribo $g(z) = z/\operatorname{sen} z$ que tiene una singularidad evitable, así $z^2 f(z) = g^2(z)\cos z + zg(z)$. Se tiene

$$\lim_{z\to 0}\big(z^2 f(z)\big)' = \lim_{z\to 0}\big(2g(z)g'(z)\cos z - g^2(z)\operatorname{sen} z + zg'(z) + g(z)\big) = 2g(0)g'(0) + g(0).$$

Se cumple $g(0) = 1$ por L'Hôpital y $g'(0) = 0$ por ser par o derivando y aplicando L'Hôpital: $g'(0) = \lim_{z\to 0}(\operatorname{sen} z - z\cos z)/\operatorname{sen}^2 z = \lim_{z\to 0}(z\operatorname{sen} z)/(2\operatorname{sen} z\cos z) = 0$.