Enunciado

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [1 punto] Si f es una función <u>par</u> que es meromorfa en $\mathbb{C}$ y holomorfa en $\mathbb{C}-\{0\}$, entonces necesariamente $\int_{\{|z|=1\}} f(z)\,dz = 0$.

b) [1.5 puntos] Existe un polinomio P no idénticamente nulo tal que $P(\wp) = 0$.

c) [1.5 puntos] Si $\mathcal{P}$ es un paralelogramo fundamental con $0 \in \operatorname{Int}(\mathcal{P})$ y la función definida por $\sum_{\omega\in\Lambda}(z-\omega)^{-2018}$ no se anula en $\partial\mathcal{P}$, entonces tiene 2018 ceros en $\operatorname{Int}(\mathcal{P})$ contados con multiplicidades.

2) [3 puntos] Para $f(z) = (z^2+1)\cos(\pi z)$, halla todos los polos de $1/f$ y sus residuos.

3) [3 puntos] Demuestra la siguiente identidad debida a Gauss:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n x^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^n}{1+x^n} \qquad \text{para} \quad -1 < x < 1.$$

Indicación. ¿Por qué la igualdad $\prod(1+x^n)^{-1} = \prod(1-x^n)/(1-x^{2n}) = \prod(1-x^{2n-1})$ es “elemental” sin necesidad de apelar a propiedades de funciones elípticas?

Solución

1) a) (V) Al ser par, su desarrollo de Laurent en $z=0$ será de la forma $\sum_{k=-N}^{\infty} a_k z^{2k}$ y por tanto el residuo (el coeficiente de z^{-1}) es nulo y la integral se anula.

b) (F) Si $P = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots$ con $c_n \neq 0$ entonces $P(\wp(z)) = c_n(z^{-2})^n + \dots$ por tanto tiene un polo de orden $2n$.

c) (V) La función tiene un polo de orden 2018 en $z=0$ y no hay más polos en $\mathcal{P}$. Sabemos que el número de polos y ceros en $\mathcal{P}$ de cualquier función elíptica, contados con multiplicidades, coincide (si no están en el borde).

2) Hay polos donde f se anula: $z^2+1=0$ implica $z=\pm i$ y $\cos(\pi z)=0$ implica $z = 1/2+k$ con $k\in\mathbb{Z}$. Tanto la derivada de z^2+1 como la de $\cos(\pi z)$ son no nulas en los puntos indicados (y no hay ceros comunes), por tanto los polos son simples. La fórmula para residuos de polos simples, $\operatorname{Res}(F,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)F(z)$, da

$$\operatorname{Res}(1/f,\pm i) = \lim_{z\to\pm i}\frac{z\mp i}{(z^2+1)\cos(\pi z)} = \frac{1}{\cos(\pi i)}\lim_{z\to\pm i}\frac{z\mp i}{z^2+1} = \frac{1}{\pm 2i\cos(\pi i)} \left[= \frac{\mp i}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right].$$

Para $z = z_k$ con $z_k = 1/2 + k$ se procede de forma similar: $\operatorname{Res}(1/f, z_k)$ es

$$\lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{(z^2+1)\cos(\pi z)} = \frac{1}{z_k^2+1} \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{\cos(\pi z)} = \frac{1}{-\pi(z_k^2+1)\operatorname{sen}(\pi z_k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi\big((1/2+k)^2+1\big)},$$

donde se ha usado $\operatorname{sen}(\pi z_k) = (-1)^k$.

3) Por la definición de θ como una serie, escribiendo $q = x$ (con lo cual $0 < x < 1$ corresponde a $\tau = it$, $t \in \mathbb{R}^+$ y $-1 < x < 0$ a $\tau = 1 + it$, el caso $x = 0$ es trivial) se tiene que el primer miembro es $\theta(1/2)$. Por la fórmula del triple producto de Jacobi, $\theta(1/2)$ es igual a $Q(x) = \prod(1 - x^{2n})(1 - x^{2n-1})^2$. Por la indicación

$$Q(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2n}}{(1+x^n)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^n)(1+x^n)}{(1+x^n)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n}.$$

Prueba de la indicación: El primer paso se sigue de $1 - x^{2n} = (1 - x^n)(1 + x^n)$. Como todo número es par o es impar, $\prod(1 - x^n) = \prod(1 - x^{2n})(1 - x^{2n-1})$ y eso justifica el segundo paso.

Criterios de corrección y comentarios

1) Poner verdadero o falso sin explicaciones correctas no cuenta nada. Excepcionalmente (en muy pocos casos) he puesto medias puntuaciones si el razonamiento era casi correcto pero la conclusión errónea.

No existe un teorema que afirme que si f es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$, $\int_\gamma f = 0$ para una curva cerrada γ en Ω. Si $f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k z^k$ entonces $\operatorname{Res}(f, 0)$ es a_{-1}, no es a_{-N}, en general. La integral $\int_{\{|z|=1\}} z^{-2}\, dz$ no da $2\pi i$, da cero.

2) Hallar correctamente los polos vale 0.75, calcular los residuos de $\pm i$ vale 1.25 y los de $1/2 + k$ vale 1. Tres errores de cálculos en un mismo apartado, lo invalidan.

La regla de L'Hôpital requiere una indeterminación, $0/0$ en este problema, si no puede dar resultados falsos. Varios de vosotros en vez de aplicar L'Hôpital directamente, multiplicáis arriba y abajo por cierto factor que complica la derivada y los cálculos. Supongo que es por algo que os habrán enseñado y que no adivino.

3) No probar la indicación, descuenta un punto.