
Instrucciones: El problema es voluntario. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. Una solución correcta completa añade 0.5 a la calificación. Una solución especialmente breve y original se podrá premiar con una puntuación mayor.

Plazo y modo de entrega: Hasta el 9 de mayo (incluido), preferentemente en papel. Si, por el contrario, se usa el correo electrónico, enviaré confirmación.

Observación: Para resolver el problema solo puedes utilizar lo que hayas visto de variable compleja en este curso o el anterior hasta la fecha en que se propone el problema (24 de abril). **No es válido apelar a resultados más avanzados**. En particular, lo que uses sobre la función ζ debes obtenerlo de lo visto en clase.

Las derivadas n-ésimas de funciones sencillas pueden ser muy complicadas. Por ello aplicar la regla de L'Hôpital muchas veces, hallar coeficientes de Taylor de índice grande o calcular residuos de polos de orden alto puede llevar a cálculos extensos. Un ejemplo de función sencilla con derivadas n-ésimas complicadas es $\tan z$. Lo que se deduce de este problema es que se puede expandir en términos de la función ζ.

1) [0.5 puntos] Prueba la identidad

$$\tan z = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi^{-2n}\big(2^{2n}-1\big)\zeta(2n)z^{2n-1}$$

con convergencia uniforme sobre compactos en $0<|z|<\pi/2$.

Indicación (regalo de fin de curso): Formalmente, olvidándose de la convergencia, el coeficiente de z^{2n-1} es el residuo de $f(z)=z^{-2n}\tan z$ en $z=0$ que es $(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\mathbb{D}} f$. ¿Qué ocurre si se aplica el teorema de los residuos en $\mathbb{C}-\mathbb{D}$? Con ello seguramente resuelvas "medio" problema.

Otra posibilidad es intercambiar la suma con la implícita en ζ, esto es factible pero probablemente te lleve a una fórmula que desconozcas y que no te sea fácil probar.