Problema especial 2 Variable compleja II 2017-2018

Instrucciones: El problema es voluntario. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. Una solución correcta completa añade 0.7 a la calificación. Una solución especialmente breve y original se podrá premiar con una puntuación mayor.

Plazo y modo de entrega: Hasta el 23 de abril (incluido), preferentemente en papel. Si, por el contrario, se usa el correo electrónico, enviaré confirmación.

Observación: El primer ejercicio debería ser asequible para todos. El segundo es mucho más difícil. Para resolverlo, se debe conocer el resultado de equidistribución indicado en la página del curso.

Habíamos definido Möb($\mathbb{D}$) como las transformaciones de Möbius de $\mathbb{C}$ que fijan $\mathbb{D}$. De la misma forma, podríamos prestar atención a las que fijan $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

1) [0.2 puntos] Prueba que son todas de la forma $bT_a(z)+c$ con $b,c\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, $a\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ donde

$$T_a(z)=\frac{z-a}{1+az} \qquad \text{y} \qquad T_\infty(z)=-z^{-1}.$$

En temas relacionados con fractales (por ejemplo en el conjunto de Mandelbrot), se consideran iteraciones sucesivas de funciones holomorfas. Con esta motivación, dado $a\in\mathbb{R}$ definimos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_0=0$ y $x_{n+1}=T_a(x_n)$. Entendiendo $T_a(\infty)=1/a$ y $T_a(-1/a)=\infty$ (por el límite), se tienen los ejemplos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$a=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a=1$	-1	∞	1	0	-1	∞	1	0
$a=1/2$	$-1/2$	$-4/3$	$-11/2$	$24/7$	$41/38$	$44/117$	$-29/278$	$-336/527$

Los dos primeros ejemplos son periódicos el tercero parece que no.

2) [0.5 puntos] Halla todos los $a\in\mathbb{R}$ tales que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es periódica y cuando no lo sea, calcula $\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\cos x_n$.