Instrucciones: El problema es voluntario. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. Una solución correcta completa añade 0.5 a la calificación. Una solución especialmente breve y original se podrá premiar con una puntuación mayor.

Plazo y modo de entrega: Hasta el 21 de febrero (incluido), preferentemente en papel. Si, por el contrario, se usa el correo electrónico, enviaré confirmación.

Alrededor de 1830 Jacobi demostró que si uno define las funciones holomorfas en $|z| < 1$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)z^{2k+1}}{1 - z^{4k+2}} \qquad \text{y} \qquad G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(2k+1)^2},$$

entonces se tiene la sorprendente relación

$$(*) \qquad F(z^4) = \big(G(z)\big)^4.$$

No recomiendo que nadie intente probar (*) por su cuenta porque es bastante complicado[1]. En este curso estudiaremos las herramientas que usó Jacobi, aunque probablemente no veamos en clase con detalle la prueba de esta identidad en concreto.

Jacobi utilizó (*) y otras relaciones para obtener resultados aritméticos. Sea $R(n)$ el número de representaciones de $n \in \mathbb{Z}^+$ como suma de cuatro cuadrados impares, importando el orden. Por ejemplo $R(4) = 1$ porque $4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ y $R(12) = 4$ porque

$$12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2.$$

Sea también $\sigma(n)$ la suma de los divisores (positivos) de $n \in \mathbb{Z}^+$. Por ejemplo $\sigma(3) = 1 + 3 = 4$ y $\sigma(15) = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$.

1) Dando por supuesto (*), deducir que $R(n) = \sigma(n/4)$ si $n/4$ es un entero positivo impar y $R(n) = 0$ en otro caso.

---

[1] Si alguno desoye este consejo y encuentra una prueba original, distinta de las habituales, aparte de darle mi enhorabuena, lo tendré muy en cuenta.