Un resultado de equidistribución

Fernando Chamizo

4 de abril de 2018

El *teorema de aproximación de Weierstrass* afirma que *para* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, existe una sucesión de polinomios* $P_n \in \mathbb{R}[x]$ *tales que* $P_n \rightrightarrows f$, donde $\rightrightarrows$ indica convergencia uniforme. Este teorema fue probado por Weierstrass en 1885 (véase [3, §2] para la historia) y quizá haya aparecido en alguno de tus cursos de grado. Es consecuencia, no inmediata, de la siguiente variante que usaremos aquí y que también deriva del trabajo de Weierstrass: *Dada una función* F *continua y real en la circunferencia unidad* $C = \{|z| = 1\}$*, existe una sucesión de polinomios* $P_n \in \mathbb{C}[z]$ *tal que* $\Re P_n \rightrightarrows F$ *en* C. Aquí lo usaremos para probar el siguiente resultado:

Teorema (Weyl [5])**.** *Si* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$*, para cualquier* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua* 1*-periódica se cumple*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) = \int_0^1 f. \tag{1}$$

Demostración. Una función F como en el resultado anterior es continua y periódica en el ángulo. Definiendo $f(t) = F\big(e^{2\pi i t}\big)$ está claro que f es continua, real y 1-periódica y que toda función con estas propiedades se obtiene así. Imponer $P_n(0) \in \mathbb{R}$ es gratis porque restar a P_n una constante imaginaria pura no tiene efecto sobre $\Re P_n$. En esta situación:

$$P_n(0) = \Re P_n(0) = \Re\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n(z)}{z}\, dz\Big) = \Re\Big(\int_0^1 P_n\big(e^{2\pi i t}\big)\, dt\Big) \to \int_0^1 f(t)\, dt. \tag{2}$$

Definiendo $Q_n = P_n - P_n(0)$ y $g(t) = f(t) - \int_0^1 f$, por la convergencia uniforme, se tiene que para cada $\epsilon > 0$ existe M tal que $\big|g(t) - \Re Q_M(e^{2\pi i t})\big| < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Escojamos, $t = n\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ fijado y sumemos en n:

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} g(n\alpha) - \Re \sum_{n=1}^{N} Q_M(z_\alpha^n)\Big| < \epsilon N \qquad \text{donde} \quad z_\alpha = e^{2\pi i \alpha}. \tag{3}$$

Si llamamos c_d, c_{d-1},..., $c_0 = Q_M(0) = 0$ a los coeficientes de Q_M, se tiene

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} Q_M(z_\alpha^n)\Big| \le \sum_{k=1}^{d} |c_k| \Big|\sum_{n=1}^{N} (z_\alpha^n)^k\Big| \le \sum_{k=1}^{d} \frac{2|c_k|}{|1 - z_\alpha^k|} \le dcR \tag{4}$$

donde se ha usado la suma de una progresión geométrica en la penúltima desigualdad y en la última se ha escrito $c = \max|c_k|$ y $R = \max|1 - z_\alpha^k|^{-1}$ que es finito porque $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Tomando $N > dcR\epsilon^{-1}$ en (3) se sigue $N^{-1}\big|\sum_{n=1}^N g(n\alpha)\big| < 2\epsilon$. Como esto se cumple para ϵ arbitrariamente pequeño, recordando la definición de g, se deduce el resultado. □

La demostración típica del teorema es a través de series de Fourier y el resultado de Weierstrass que estamos usando es, en ese contexto, que toda función continua periódica es límite uniforme de polinomios trigonométricos. También se puede probar de manera "elemental" únicamente usando el principio del palomar, aritmética básica y la definición de la integral de Riemann [1, Th.445] [2] pero tal prueba conceptualmente es menos simple.

Lo que en realidad probó Weyl en 1916 [5] es más general: permite cambiar $n\alpha$ por $n^\ell\alpha$ para cualquier $\ell \in \mathbb{Z}^+$. En los casos $\ell > 1$ el esquema anterior no funciona porque uno necesitaría estimar $\sum_{n=1}^N (z_\alpha^{n^\ell})^k$ y aquí no tenemos la ayuda de las progresiones geométricas. Según la notas de [1, XXIII] el caso $\ell = 1$, esto es, el teorema anterior, fue encontrado casi al mismo tiempo por Bohl, Sierpiński y Weyl.

En 1937 Stone probó una forma muy abstracta del teorema de aproximación de Weierstrass que afirma algo similar sustituyendo el intervalo por un espacio de Hausdorff compacto y los polinomios por una familia de funciones con cierta propiedad algebraica y cierta propiedad topológica. Este resultado es el *Teorema de Stone-Weierstrass* y es más raro que lo veas en cursos de grado. El artículo original de Stone tiene más de 100 páginas y aunque publicó después una versión más reducida, es mejor consultarlo en exposiciones modernas [4, §7.32]. Los teoremas de aproximación mencionados al principio son consecuencias de este teorema general.

Referencias

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, fifth edition, 1979.

[2] A. Miklavc. Elementary proofs of two theorems on the distribution of numbers $n\theta$ (mod 1). *Proc. Amer. Math. Soc.*, 39:279–280, 1973.

[3] A. Pinkus. Weierstrass and approximation theory. *J. Approx. Theory*, 107(1):1–66, 2000.

[4] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[5] H. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Ann.*, 77(3):313–352, 1916.