Un resultado de equidistribución

El *teorema de aproximación de Weierstrass* afirma que *para* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, existe una sucesión de polinomios* $P_n \in \mathbb{R}[x]$ *tales que* $P_n \rightrightarrows f$, donde $\rightrightarrows$ indica convergencia uniforme. Este teorema es consecuencia, no inmediata, de la siguiente variante que también deriva del trabajo de Weierstrass: *Dada una función F continua y real en la circunferencia unidad $C = \{|z| = 1\}$, existe una sucesión de polinomios $P_n \in \mathbb{C}[z]$ tal que $\Re P_n \rightrightarrows F$ en C.* Aquí lo usaremos para probar el siguiente resultado de Weyl:

Teorema. *Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, para cualquier $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua 1-periódica se cumple*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) = \int_0^1 f. \tag{1}$$

Demostración. Una función F como en el resultado anterior es continua y periódica en el ángulo. Definiendo $f(t) = F\big(e^{2\pi i t}\big)$ está claro que f es continua, real y 1-periódica y que toda función con estas propiedades se obtiene así. Imponer $P_n(0) \in \mathbb{R}$ es gratis porque restar a P_n una constante imaginaria pura no tiene efecto sobre $\Re P_n$. En esta situación:

$$P_n(0) = \Re P_n(0) = \Re\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P_n(z)}{z}\,dz\Big) = \Re\Big(\int_0^1 P_n\big(e^{2\pi i t}\big)\,dt\Big) \to \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{2}$$

Definiendo $Q_n = P_n - P_n(0)$ y $g(t) = f(t) - \int_0^1 f$, por la convergencia uniforme, se tiene que para cada $\epsilon > 0$ existe M tal que $\big|g(t) - \Re Q_M(e^{2\pi i t})\big| < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Escojamos, $t = n\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ fijado y sumemos en n:

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} g(n\alpha) - \Re\sum_{n=1}^{N} Q_M(z_\alpha^n)\Big| < \epsilon N \qquad \text{donde} \quad z_\alpha = e^{2\pi i\alpha}. \tag{3}$$

Si llamamos c_d, $c_{d-1}, \dots, c_0 = Q_M(0) = 0$ a los coeficientes de Q_M, se tiene

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} Q_M(z_\alpha^n)\Big| \le \sum_{k=1}^{d} |c_k| \Big|\sum_{n=1}^{N} (z_\alpha^n)^k\Big| \le \sum_{k=1}^{d} \frac{2|c_k|}{|1 - z_\alpha^k|} \le dcR \tag{4}$$

donde se ha usado la suma de una progresión geométrica en la penúltima desigualdad y en la última se ha escrito $c = \max|c_k|$ y $R = \max|1 - z_\alpha^k|^{-1}$ que es finito porque $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Tomando $N > dcR\epsilon^{-1}$ en (3) se sigue $N^{-1}\big|\sum_{n=1}^{N} g(n\alpha)\big| < 2\epsilon$. Como esto se cumple para ϵ arbitrariamente pequeño, recordando la definición de g, se deduce el resultado. $\square$