Convergencia de funciones holomorfas

Fernando Chamizo

25 de marzo de 2018

Nota: Las secciones 2 y 4 corresponden a algunos puntos del capítulo 5 de [3].

1. Convergencia puntual y uniforme en una variable real

Vamos a olvidarnos por un momento de la variable compleja para repasar la convergencia de funciones de variable real. Esto nos permitirá recordar algunas definiciones que tienen un completo análogo en variable compleja. Especialmente elaboraremos un pequeño "bestiario" de contraejemplos que contrastará con lo que probaremos después para funciones holomorfas.

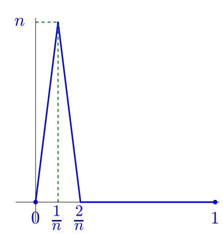
Dada una sucesión de funciones reales $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con dominio común $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y de variable real, $I \subset \mathbb{R}$, el concepto más básico y natural de convergencia es considerar

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{para } x \in I. \tag{1}$$

Si estos límites existen se dice que f_n *converge puntualmente* a f y a menudo se escribe simplemente $f_n \to f$. La convergencia puntual no respeta las operaciones ni las clases de funciones básicas del análisis matemático. Así $f_n \to f$ no implica en general $\lim \int_I f_n = \int_I f$ ni $\lim f_n'(x) = f'(x)$ para $x \in I$, ni siquiera que tales límites existan. Tampoco se respeta en general la continuidad ni la diferenciabilidad. Veamos algunos ejemplos al respecto.

Las funciones $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \le x < 1/n, \\ 2n - n^2x & \text{si } 1/n \le x < 2/n, \\ 0 & \text{si } 2/n \le x \le 1. \end{cases}$$

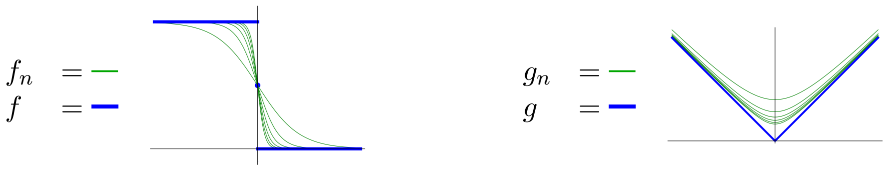


son continuas y verifican $\int_0^1 f_n = 1$ sin embargo convergen puntualmente a la función idénticamente nula que integra cero.

De la misma forma, las funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ convergen puntualmente a la función idénticamente nula mientras que $f_n'(0) = 1$ para todo n.

Respecto a la continuidad y diferenciabilidad, las funciones $f_n, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = (e^{nx} + 1)^{-1}$ y $g_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-1}}$ muestran respectivamente que el límite puntual de funciones continuas no es en general continuo y lo mismo con la diferenciabilidad.

(2)



En parte estos problemas se arreglan introduciendo una definición más fuerte de convergencia. Para $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ como antes, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$, se dice que f_n *converge uniformemente* a f si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \big| f_n(x) - f(x) \big| = 0. \tag{3}$$

Es algo así como pedir que no haya puntos que se queden rezagados en la velocidad de convergencia puntual. A veces se escribe $f_n \rightrightarrows f$ o simplemente se dice $f_n \to f$ uniformemente.

Resultados básicos de los cursos de análisis [6] muestran que para $I = [a, b]$, $f_n \rightrightarrows f$ implica $\lim \int_I f_n = \int_I f$ y que si las f_n son continuas entonces f también lo es. En el primero de los resultados la finitud del intervalo I asegura la existencia de las integrales y su límite para f_n continuas.

La diferenciabilidad no se arregla, como muestra el ejemplo anterior $g_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-1}}$ que converge al valor absoluto. Hay un enunciado que involucra convergencia uniforme y derivadas pero es más complicado que pedir simplemente $f_n \rightrightarrows f$.

Algunos conceptos más fundamentales que los del análisis tampoco se respetan por convergencia uniforme. Mencionaremos dos de ellos que aparecerán más tarde. En $I = [-1, 1]$, las funciones $f_n(x) = 1 + n^{-1} + \operatorname{sen}(2\pi x)$ no tienen ceros pero su límite uniforme, $1 + \operatorname{sen}(2\pi x)$, tiene dos ceros en I y tomando $f_n(x) = x + \sqrt{x^2 + n^{-1}}$ en este mismo intervalo tenemos que el límite uniforme de funciones inyectivas no tiene por qué ser una función inyectiva.

2. Los teoremas de Weierstrass y Hurwitz

Los conceptos de convergencia puntual y uniforme se traducen fielmente al ámbito de las funciones complejas. Es decir, dadas $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ de variable compleja, $f_n \to f$ y $f_n \rightrightarrows f$ significan respectivamente

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad \forall z \in A \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| = 0 \tag{4}$$

En análisis complejo se suelen considerar funciones holomorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ con Ω abierto (lo que daremos por supuesto en lo sucesivo sin mencionarlo cada vez) sin embargo para algunos aspectos de la convergencia uniforme es conveniente considerar un compacto. Por eso se acuña la expresión *convergencia uniforme sobre compactos*, lo que significa que se cumple $f_n\big|_K \rightrightarrows f\big|_K$ para cualquier compacto $K \subset \Omega$, aunque en general la convergencia podría no ser uniforme en Ω. Por ejemplo, para $f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por $f_n(z) = z^n$, se cumple $f_n \to 0$ en $\mathbb{D}$ pero no uniformemente porque $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| = 1$, sin embargo sí se tiene $f_n \rightrightarrows 0$ sobre compactos[1].

En una variable real la convergencia uniforme preservaba la continuidad y las integrales sobre compactos. Lo mismo se aplica en variable compleja con una prueba idéntica. Por otro lado, las derivadas no funcionaban tan bien. Este problema desaparece en el mundo holomorfo.

Teorema 2.1 (Teorema de convergencia de Weierstrass). *Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones holomorfas en Ω, si $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos entonces f es holomorfa en Ω y además $f_n' \rightrightarrows f'$ sobre compactos.*

Hay un corolario que permite estudiar series de funciones y que tiene un análogo con el mismo nombre en variable real.

Corolario 2.2 (Criterio M de Weierstrass). *Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones holomorfas en Ω, si para cada compacto $K \subset \Omega$ existen constantes $M_n(K)$ tales que $|f_n(z)| \le M_n(K)$ para $z \in K$ y $\sum_{n=1}^\infty M_n(K)$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos y define una función holomorfa F en Ω. Además $F'(z) = \sum_{n=1}^\infty f_n'(z)$ también con convergencia uniforme sobre compactos.*

Demostración. La convergencia de la serie que define F se sigue por el criterio de comparación. Definiendo $F_N(z) = \sum_{n=1}^N f_n(z)$ se tiene que $\big|F(z) - F_N(z)\big| \le \sum_{n>N} M_n(K)$ para todo $z \in K$, que es arbitrariamente pequeño tomando N grande. Entonces $F_N \rightrightarrows F$ sobre compactos y basta aplicar el teorema anterior. $\square$

Veamos ahora cómo se comportan la anulación y la inyectividad con respecto a la convergencia uniforme.

Teorema 2.3 (Teorema de Hurwitz). *Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω tal que $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos entonces:*

a) Si las f_n no se anulan en Ω entonces f no se anula o es la función idénticamente cero.

b) Si las f_n son inyectivas en Ω entonces f es inyectiva o es una función constante.

Pasamos ahora a las pruebas de los teoremas anteriores. Para el primero, lo único relevante es que las funciones holomorfas siempre se pueden escribir como integrales y la integración no da problemas con la convergencia uniforme. Para el segundo, hay que tener en mente que el teorema de Rouché asegura que funciones parecidas tienen el mismo número de ceros.

[1] En [3] se usa la notación $f_n \Longrightarrow f$ para abreviar "$f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos".

Demostración del Teorema 2.1. Sea γ una curva cerrada[2] incluida en un disco cerrado $D \subset \Omega$ entonces por el teorema de Cauchy aplicado a f_n

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \big(f(z) - f_n(z)\big)\, dz. \tag{5}$$

El módulo de la última integral es arbitrariamente pequeño ya que $\sup_{z \in D} \big|f(z) - f_n(z)\big| \to 0$ por la convergencia uniforme sobre compactos. Con ello $\int_\gamma f = 0$ y el teorema de Morera implica que f es holomorfa en cualquier disco incluido en Ω, por tanto lo es en Ω.

Por otro lado, la fórmula integral de Cauchy asegura que para z en cualquier disco cerrado $D' \subset \mathrm{Int}(D)$ se cumple

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(z) - f(z)}{(w - z)^2}\, dw. \tag{6}$$

Como $|w - z|$ permanece acotado inferiormente por la distancia entre ∂D y $\partial D'$, esta fórmula prueba que $f_n \rightrightarrows f$ en ∂D implica $f_n' \rightrightarrows f'$ en D'. Cualquier compacto incluido en Ω se recubre con un número finito de discos $\mathrm{Int}(D')$ por tanto la convergencia es uniforme sobre compactos. □

Demostración del Teorema 2.3. Comenzamos por la parte *a*). Si f se anulase en $z_0 \in \Omega$ y no fuera idénticamente cero entonces existiría un disco cerrado $D \subset \Omega$ centrado en z_0 en el que el único cero de f es z_0 (porque los ceros no pueden tener un punto de acumulación). Sea m el mínimo de $|f(z)|$ en ∂D y sea N tal que $\big|f_n(z) - f(z)\big| < m/2$ en D para $n > N$. Tal N existe por la convergencia uniforme. De esta forma $\big|f_n(z) - f(z)\big| < \big|f(z)\big|/2$ para $n > N$ y el teorema de Rouché implica que las f_n tienen un cero en D, lo cual contradice la hipótesis.

La parte *b*) se deduce de *a*) considerando las funciones $g_n : \Omega - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ con $z_0 \in \Omega$. Decir que f_n es inyectiva es lo mismo que decir que g_n no tiene ceros para cada z_0. Por *a*) se sigue que f es constantemente $f(z_0)$ o que $f(z) \neq f(z_0)$ para $z \neq z_0$, es decir, que f es inyectiva. □

3. Presentando las funciones ζ y Γ

Vamos a aprovechar los temas del apartado anterior para introducir una función que proviene de una famosa memoria de Riemann sobre la distribución de los números primos [2], la cual fue el punto de partida de la aplicación del análisis complejo en dicha área. Su impacto fue enorme, algunos los resultados que vemos hoy en día en los textos de variable compleja se crearon originalmente para aplicarlos a esta función introducida por Riemann. Acompañándola hay otra función más clásica que, en cierta manera, permite definir factoriales de números

[2] Para ser riguroso hay que imponer alguna regularidad, al menos que sea rectificable.

complejos. Por tradición, especialmente en la primera de estas funciones, a la variable se le suele llamar s en lugar de z. También está muy extendido escribir σ y t para designar a la parte real y a la parte imaginaria de la variable.

La *función ζ de Riemann* se define en $\Re(s) > 1$ como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{7}$$

Se tiene $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$ con $\sigma = \Re(s)$ y en cada compacto de $\{\Re(s) > 1\}$, σ tiene un mínimo mayor que 1, por tanto el Corolario 2.2 prueba que las sumas parciales en (7) convergen uniformemente sobre compactos y que ζ es holomorfa en $\Re(s) > 1$.

La relación más directa de esta función con los números primos es la siguiente:

Proposición 3.1 (Producto de Euler)**.** *Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 3, 5, \dots\}$ la sucesión de los primos, entonces*

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - p_n^{-s}\big)^{-1} \qquad \textit{para} \quad \Re(s) > 1. \tag{8}$$

La prueba de Euler y probablemente la que convencerá de inmediato al lector es sencillamente sustituir $\big(1 - p_n^{-s}\big)^{-1}$ por $1 + p_n^{-s} + \big(p_n^2\big)^{-s} + \big(p_n^3\big)^{-s} + \dots$ y decir que por el teorema fundamental de la aritmética cada entero positivo a la potencia $-s$ aparece exactamente una vez entre los sumandos que resultan del producto infinito de estas sumas infinitas. Demasiados infinitos para los más puristas. Para ellos y para practicar lo anterior, veamos una prueba un poco más cuidadosa (en lo esencial siguiendo [1, §5.4.1]).

Demostración. Consideramos las funciones $f_n(s) = \zeta(s) \prod_{k=1}^{n} \big(1 - p_k^{-s}\big) - 1$. Probando $f_n \rightrightarrows 0$ sobre compactos de $\Re(s) > 1$ se deduce el resultado. El producto que aparece para $n = 1$ es

$$\zeta(s)\big(1 - 2^{-s}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \sum_{\substack{k=1 \\ 2\nmid k}}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \tag{9}$$

La última serie converge sobre compactos por el Corolario 2.2 y en el razonamiento hemos usado implícitamente la convergencia absoluta para agrupar términos de la serie. Razonado inductivamente, se tiene

$$\zeta(s) \prod_{k=1}^{n} \big(1 - p_k^{-s}\big) = \sum_{k \in \mathcal{N}}^{\infty} \frac{1}{k^s} \qquad \text{con} \quad \mathcal{N} = \{k \in \mathbb{Z}^+ \,:\, p_1, \dots, p_n \nmid k\}. \tag{10}$$

Todo entero positivo salvo 1 tiene un factor primo que no lo supera, por tanto $\mathcal{N} - \{1\} \subset (p_n, \infty)$ y de aquí $|f_n(s)| \le \big|\sum_{k > p_n} k^{-s}\big|$ que puede acotarse por $p_n^{1-\sigma}/(\sigma - 1)$ con $\sigma = \Re(s)$, gracias al criterio de la integral. Como ya habíamos mencionado, σ excede a una constante mayor que 1 en cada compacto de $\{\Re(s) > 1\}$, por tanto $f_n \rightrightarrows 0$ en cada uno de ellos. $\square$

La serie (7) parece mostrar que no es posible dar sentido holomorfo a ζ más allá del abierto $\{\Re(s) > 1\}$ pero eso es como si alguien dedujera de $z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n$, válido para $|1-z| < 1$, que no se puede hallar el inverso de 2018.

Teorema 3.2. *La función ζ se puede extender a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo simple en $s = 1$ con residuo 1.*

Hay pruebas elementales de este nada obvio resultado pero aquí seguiremos la estela de Riemann [2] con una prueba más informativa que involucra la *función* Γ. Tal función se define para $\Re(s) > 0$ como

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx. \tag{11}$$

Integrando por partes (ejercicio), se deduce

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{12}$$

Con ello y $\Gamma(1) = 1$ se obtiene $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. En este sentido Γ generaliza al factorial. Además $\Gamma(s) = s^{-1}\Gamma(s+1)$ permite extender Γ de manera meromorfa a $\Re(s) > -1$ con un único polo simple en $s = 0$ que tiene residuo $\Gamma(0+1) = 1$. Iterando esta fórmula, se sigue $\Gamma(s) = s^{-1}(s+1)^{-1}\dots(s+n-1)^{-1}\Gamma(s+n)$ que prueba:

Lema 3.3. *La función Γ se extiende a una función meromorfa cuyos polos son simples y están en $\mathbb{Z}_{\le 0}$.*

En realidad en este argumento hemos dado por hecho que (11) define una función holomorfa en $\Re(s) > 0$. Una manera de probarlo con rigor, quizá con demasido, es proceder como en el Teorema 2.1 cambiando sumas por integrales en la definición de f_n. Así el teorema de Morera da la holomorfía tomando en (5) $f = \Gamma$ y f_n la integral de (11) pero ahora en $[1/n, \infty)$, para evitar el posible problema en cero. Nótese que la aplicación del teorema de Fubini para tener $\int_\gamma f_n = 0$ está justificada y que $\big|f(s) - f_n(s)\big| = \big|\int_0^{1/2}\big| \le \sigma^{-1}n^{-\sigma}$.

Necesitaremos también algo sobre Γ cuya prueba a este nivel es un poco misteriosa:

Lema 3.4. *La función Γ no tiene ningún cero en $\mathbb{C}$.*

Demostración. La fórmula válida para $\Re(w), \Re(s-w) > 0$

$$\Gamma(s)\int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}\,dx = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}y^{s-1}e^{-y}\,dxdy = \Gamma(s-w)\Gamma(w) \tag{13}$$

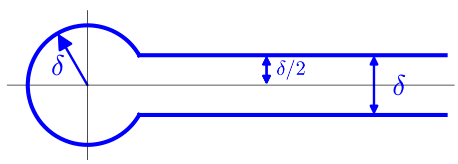
se sigue de (11) haciendo el cambio $x = u/v$, $y = u+v$ para justificar el último paso (ejercicio). Si $\Gamma(s) = 0$, aplicando (12) sucesivas veces podemos suponer $\Re(s) > 0$ y tomando $w = \epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y usando $\Gamma(\epsilon) > 0$, por (11), se llegaría a que $\Gamma(s-\epsilon) = 0$ lo que contradice que los ceros de una función holomorfa (no nula) son aislados. $\square$

La relación entre ζ y Γ que Riemann utilizó de partida fue

$$(14) \qquad \zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx \overset{x=nu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-nu}\, du = \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\, du$$

para $\Re(s) > 1$. Gracias a la convergencia uniforme sobre compactos en esta región, no hay problema al intercambiar sumas e integrales.

Ahora consideramos la curva C_δ de la figura orientada positivamente:



El siguiente resultado da una fórmula para ζ válida en casi todos los valores complejos y es todo lo que se necesita para obtener el Teorema 3.2.

Proposición 3.5. *La función ζ se extiende a una función holomorfa en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ por medio de la fórmula para $0 < \delta < 2\pi$ arbitrario*

$$(15) \qquad \zeta(s) = \frac{i}{2\Gamma(s)\,\mathrm{sen}(\pi s)} \int_{C_\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz$$

donde $(-z)^{s-1}$ significa[3] *$|z|^{s-1} e^{i\alpha(s-1)}$ con $\alpha \in (-\pi, \pi)$ el argumento de $-z$.*

Más adelante en el curso veremos que la fracción inicial se "simplifica" a $i\Gamma(1-s)/2\pi$.

Demostración. Por el teorema de Cauchy aplicado en la región comprendida entre C_δ y $C_{\delta'}$ (aquí se necesita $\delta, \delta' < 2\pi$ para no capturar polos) la integral no depende de δ y podemos sustituirla por su límite $\delta \to 0^+$. En esta situación, para $\Re(s) > 1$ la contribución del arco de circunferencia tiende a cero, el ángulo de $-z$ para z en la línea superior tiende a $-\pi$ y tiende a π para z en la línea inferior. Por consiguiente

$$(16) \qquad \int_{C_\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz = \int_{\infty}^{0} \frac{x^{s-1} e^{-\pi i(s-1)}}{e^x - 1}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{\pi i(s-1)}}{e^x - 1}\, dx$$

[3] Esto es, $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$ con la determinación del ángulo $(-\pi, \pi)$ para el logaritmo.

Simplificando $-e^{-\pi i(s-1)} + e^{\pi i(s-1)} = -2i \operatorname{sen}(\pi s)$ y recordando (14), se sigue el resultado para $\Re(s) > 1$ y $s \notin \mathbb{Z}$, para evitar $\operatorname{sen}(\pi s) = 0$. Ahora bien, teniendo en cuenta el Lema 3.4, la fórmula del enunciado tiene perfecto sentido para $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ y es holomorfa (la integral es holomorfa de nuevo por el teorema de Morera) por tanto extiende ζ de manera holomorfa. $\square$

Demostración del Teorema 3.2. Por (7) sabemos que ζ no tiene polos en $s \in \mathbb{Z}_{>1}$. Por otro lado, el Lema 3.3 y que $\operatorname{sen}(\pi s)$ tenga ceros simples en $s \in \mathbb{Z}_{\le 0}$, asegura mediante (15) que hay singularidades evitables allí. Finalmente, $(s-1)/\operatorname{sen}(\pi s) \to -1/\pi$ cuando $s \to 1$, entonces el residuo en $s = 1$ utilizando (15) es

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = -\frac{i}{2\pi}\int_{C_\delta} \frac{1}{e^z - 1}\, dz = -\frac{i}{2\pi}\cdot 2\pi i = 1, \tag{17}$$

donde se ha usado $\Gamma(1) = 1$ y el teorema de los residuos para evaluar la integral. $\square$

4. El teorema de Montel

Una vez que hemos visto que las sucesiones de funciones holomorfas que convergen uniformemente tienen buenas propiedades, vamos a introducir familias (esta palabra es jerga, conjuntos, si se prefiere) de funciones en las que cualquier sucesión de funciones se puede refinar a una de estas buenas. Concretamente, diremos que una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una *familia normal* si cualquier sucesión de funciones en la familia tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos. No se exige que la función límite esté en $\mathcal{F}$.

Montel introdujo la expresión *familia normal* en [4]. Con la terminología moderna de la topología o el análisis funcional, debería hablarse de familias precompactas o relativamente compactas pero el calificativo "normal" ha permanecido dentro del ámbito de la variable compleja y prácticamente no se emplea fuera de ella.

¿Por qué preocuparnos por familias con esta propiedad? ¿para qué es útil tener una subsucesión que converge uniformemente? En el caso holomorfo que nos ocupa, veremos una aplicación en la prueba de un bello teorema de Riemann sobre aplicaciones conformes. En términos generales, dentro del análisis matemático, el concepto se usa habitualmente para demostrar la existencia de la solución de problemas en los que tenemos lo que creemos que son aproximaciones de ella. Por ejemplo, la demostración habitual del teorema de Peano de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, a grandes rasgos se basa en utilizar que las aproximaciones que se obtendrían por el método de Euler que se estudia en cálculo numérico están en una familia precompacta. La ecuación diferencial se escribe en forma integral y así todo funciona bien con los límites si hay convergencia uniforme.

En su tesis doctoral, Montel estableció un criterio sencillo, hoy en día llamado *teorema de Montel*, para saber si una familia de funciones holomorfas es normal (en [5, §7.3] hay algunos comentarios históricos al respecto).

Teorema 4.1 (Teorema de Montel)**.** *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es normal si y sólo si está acotada en cada compacto $K \subset \Omega$, esto es, $|f(z)| \le C_K$ para todo $z \in K$ y $f \in \mathcal{F}$.*

Este resultado no es válido en general para familias de funciones continuas pero el *teorema de Ascoli-Arzelà* afirma que sí es cierto en ese contexto si se añade la hipótesis de que la familia sea *equicontinua*, esto significa que fijado un compacto K, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(18) \qquad \big|f(z) - f(w)\big| < \epsilon \quad \text{se cumple para toda } f \in \mathcal{F} \text{ y } z, w \in K \text{ con } |z - w| < \delta.$$

La prueba del teorema de Montel consiste en comprobar que la equicontinuidad está garantizada cuando trabajamos con funciones holomorfas. Solo necesitamos una implicación del resultado para funciones continuas.

Teorema 4.2 (Teorema de Ascoli-Arzelà, versión reducida)**.** *Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones continuas $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que está acotada en cada compacto y es equicontinua, entonces $\mathcal{F}$ es normal.*

En realidad este resultado es válido para Ω un abierto en cualquier espacio métrico que tenga un subconjunto numerable denso. Además el recíproco es cierto, como hemos sugerido. Es con este enunciado generalizado o en $\mathbb{R}^n$ con el que suele recibir el nombre de teorema de Ascoli-Arzelà. Por cierto, muchos autores restablecen el orden alfabético Arzelà-Ascoli.

Demostración del Teorema 4.1. Si la familia no estuviera acotada en un compacto, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ existiría $f_n \in \mathcal{F}$ tal que el máximo de $|f_n|$ en K es mayor que n. Para cualquier función holomorfa fijada, f se tiene que el supremo de $|f_n - f|$ tiende a ∞, lo que impide $f_{n_k} \rightrightarrows f$ y prueba la implicación directa.

Para la otra implicación usaremos un argumento parecido al de la segunda parte de la prueba del Teorema 2.1. Dado un disco $\mathbb{D}_{2\delta}$ de radio $2\delta > 0$ con $\overline{\mathbb{D}}_{2\delta} \subset \Omega$, la fórmula integral de Cauchy implica que para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_\delta$ (el disco de radio la mitad) y $f \in \mathcal{F}$

$$(19) \quad f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{2\delta}} \Big(\frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{f(z)}{z - z_2}\Big)\, dz = \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{2\delta}} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)}\, dz.$$

Por hipótesis, $|f|$ es menor que cierta constante en $\overline{\mathbb{D}}_{2\delta}$ y la desigualdad triangular prueba $|(z - z_1)(z - z_2)| > \delta^2$. Por tanto tenemos $\big|f(z_1) - f(z_2)\big| \le c|z_1 - z_2|$ donde c es una constante que solo depende del disco $\overline{\mathbb{D}}_{2\delta}$. Cada compacto K admite un recubrimiento finito por discos $\bigcup_{j=1}^N \mathbb{D}_{\delta_j}$ y tomando $\widetilde{\delta}$ suficientemente pequeño se consigue que cualesquiera $z, w \in K$ a distancia menor que $\widetilde{\delta}$ estén dentro de un mismo disco de la unión[4]. Tomando el máximo de todas las constantes c correspondientes a los discos, se sigue $\big|f(z)-f(w)\big| \le C|z-w|$ para todo $z, w \in K$ y $f \in \mathcal{F}$, lo cual implica (18). De esta forma estamos bajo las hipótesis del Teorema 4.2. $\square$

La demostración del teorema 4.2 no es especialmente difícil pero el uso de infinitas subsucesiones la hace un poco intrincada. Toda la idea es que la convergencia de una sucesión de funciones sobre un compacto compuesto por un número finito de puntos es necesariamente uniforme y gracias a la equicontinuidad no se pierde mucho al aproximar un compacto por un conjunto finito que sea muy tupido.

Demostración del Teorema 4.2. Consideremos $\mathcal{D} = \big\{z \in \Omega \, : \, \Re(z), \Im(z) \in \mathbb{Q}\big\}$. Este es un conjunto denso en $\mathbb{C}$ y numerable (porque $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable), digamos $\mathcal{D} = \{q_1, q_2, \dots\}$. Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $f_n \in \mathcal{F}$, por hipótesis $|f_n(q_k)| < c_k$.

El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que $\{f_n(q_1)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{f_{n_k^1}(q_1)\}_{k=1}^{\infty}$ donde el superíndice de n_k indica que es para q_1. Consideremos ahora la sucesión $\{f_{n_k^1}(q_2)\}_{k=1}^{\infty}$ que, de nuevo por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión convergente $\{f_{n_k^2}(q_2)\}_{k=1}^{\infty}$. Inductivamente se construye una subsucesión convergente $\{f_{n_k^m}(q_m)\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_{n_k^{m-1}}(q_m)\}_{k=1}^{\infty}$. Finalmente definimos $g_k = f_{n_k^k}$ y la construcción asegura que para cada j la sucesión $\{g_k(q_j)\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente.

Dado $\epsilon > 0$, sea δ como en la definición de equicontinuidad (18) y consideremos para cada $q_k \in K$ (compacto) un disco contenido en Ω centrado en q_k y de radio menor que δ. Estos discos recubren K y por ser compacto existe un recubrimiento finito, digamos por discos $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_M$ con centros $\widetilde{q}_1, \dots, \widetilde{q}_M \in \mathcal{D}$. Gracias a la convergencia de $\{g_k(\widetilde{q}_j)\}_{k=1}^{\infty}$, existe un N tal que $\big|g_m(\widetilde{q}_j) - g_n(\widetilde{q}_j)\big| < \epsilon$ para $m, n > N$ y $1 \le j \le M$. Si $z \in K$ está en el disco $\mathbb{D}_j$, se tiene para $m, n > N$

$$\big|g_m(z) - g_n(z)\big| \le \big|g_m(z) - g_m(\widetilde{q}_j)\big| + \big|g_m(\widetilde{q}_j) - g_n(\widetilde{q}_j)\big| + \big|g_n(\widetilde{q}_j) - g_n(z)\big| < 3\epsilon, \tag{20}$$

donde se ha usado la equicontinuidad en los sumandos que involucran z y $\widetilde{q}_j$.

En resumen, hemos probado que para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $\big|g_m(z) - g_n(z)\big| \le 3\epsilon$ para todo $z \in K$. En particular, $\big\{g_n(z)\big\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y converge a cierto $g(z)$ y se tiene $\big|g(z) - g_n(z)\big| \le 3\epsilon$ independientemente de $z \in K$, es decir $g_n \rightrightarrows g$. $\square$

Referencias

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[4] Aquí se está usando la definición de compacidad y la existencia del número de Lebesgue.

[2] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function.* Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[3] J. L. Fernández Pérez. *Variable Compleja IIϵ.* 2018. La versión preliminar de algunos capítulos se pueden descargar de `www.uam.es/fernando.chamizo`.

[4] P. Montel. Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 29:487–535, 1912.

[5] R. Remmert. *Classical topics in complex function theory*, volume 172 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1998. Translated from the German by Leslie Kay.

[6] M. Spivak. *Calculus Vol. I, II.* Editorial Reverté, Barcelona, 1984.