Las ecuaciones de Maxwell I

Historia y enunciado

J.C. Maxwell publicó en el año 1873 su famoso "Tratado de electricidad y magnetismo" [Max54] que recogía en forma matemática algunas leyes experimentales conocidas relativas al electromagnetismo. El contenido matemático de esta gran obra no es en absoluto superfluo. Allí por ejemplo aparece una de las primeras demostraciones del teorema de Stokes, alcanzan protagonismo los operadores diferenciales divergencia y rotacional y se atisba el germen de lo que es el actual cálculo vectorial. Las leyes del electromagnetismo a las que nos referimos, tienen un enunciado bastante impresionante con estos operadores diferenciales y corresponden a las *ecuaciones de Maxwell*:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E}=\epsilon_0^{-1}\rho,\qquad \operatorname{div}\vec{B}=0,\qquad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\rho\vec{v}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.} \tag{1}$$

Para no introducir más notación, aquí se ha optado por reescribir el vector *densidad de corriente* y la última ecuación no está en una forma muy habitual. Cuando no hay cargas (ni corrientes) $\rho=0$ y el aspecto es más simétrico:

$$\operatorname{div}\vec{E}=0,\qquad \operatorname{div}\vec{B}=0,\qquad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\vec{B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{2}$$

Cuesta imaginar cómo estas ecuaciones tan complejas puedan recoger leyes experimentales conocidas en el siglo XIX. El mérito de Maxwell es difícil de exagerar y en parte se debe a saber traducir los experimentos en términos matemáticos convenientes. Su añadido respecto a lo que estaba respaldado experimentalmente es únicamente el último sumando de (1) que en las situaciones habituales es muy pequeño.

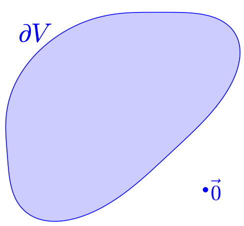
Seguramente estas ecuaciones habrían escandalizado a M. Faraday (si las hubiese llegado a conocer) que era reacio a escribir fórmulas, incluso las más simples, posiblemente por sus pobres conocimientos matemáticos, y le parecería aberrante ver escrita su contribución al electromagnetismo como la tercera ley de Maxwell. La gran ventaja de traducir experimentos más o menos sencillos (en parte detallados en [Max54]) en esta forma, es poder manipular las magnitudes físicas matemáticamente y sacar conclusiones. Como veremos, una de ellas es la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas, las cuales, huelga decirlo, desempeñan un papel esencial en el mundo moderno.

Sin adentramos en detalles físicos, diremos que $\vec{E}$ es la *intensidad de campo eléctrico* (fuerza por unidad de carga) y $\vec{B}$, la *inducción magnética*. Ambos son campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ dependientes del tiempo que representan los fenómenos electromagnéticos. Los símbolos ϵ_0 y μ_0 son constantes llamadas, respectivamente, *permitividad eléctrica* y *permeabilidad magnética* del vacío (en un medio, cambian). Podemos considerarlas como unos factores de cambio de escala para que las unidades del sistema internacional cuadren. Con este sistema de unidades sus valores son muy pequeños: $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}\ C^2 m^{-3} Kg^{-1} s^2$ y $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ C^{-2} m Kg$. Por otro lado, ρ es una función que indica la densidad de carga. Para una carga puntual en el origen (de esas que sólo aparecen en los textos), ρ sería proporcional a una *delta de Dirac*. Las cargas se pueden mover, así que ρ puede depender de la posición y el tiempo, como $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Finalmente, $\vec{v}$ indica el campo de velocidades de las cargas. Si permanecieran estáticas, $\vec{v} = \vec{0}$ y no hay corriente eléctrica.

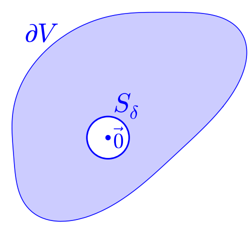
Las tres primeras ecuaciones en forma integral y diferencial

Veamos ahora cómo las ecuaciones (1) exceptuando la última, se deducen a través del teorema de Stokes de hechos que nos resultan más o menos creíbles hoy en día, después de cursos básicos de Física y nuestra experiencia cotidiana.

Según los experimentos de Ch.-A. de Coulomb, para una carga q en el origen se tiene la *ley de Coulomb* $\vec{E} = (4\pi\epsilon_0)^{-1} q\vec{x}/\|\vec{x}\|^3$. Sea $S_\delta = \partial B_\delta(\vec{0})$, esto es, la superficie esférica centrada de radio δ. Es fácil calcular $\int_{S_\delta} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} q$. Si V es una región sólida compacta que no contiene al origen, entonces de $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (por supuesto, para $\vec{x} \neq \vec{0}$) y el teorema de la divergencia, se tiene $\int_{\partial V} \vec{E} = 0$. Si $\vec{0}$ está en el interior de V, sustituyendo V por $V - B_\delta(\vec{0})$ se sigue $\int_{\partial V} \vec{E} = \int_{S_\delta} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} q$.



$$\int_{\partial V} \vec{E} = 0$$



$$\int_{\partial V} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} q$$

Si hay varias cargas, sumando los resultados correspondientes a las diferentes leyes de Coulomb, se obtiene

$$\int_{\partial V} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} Q \qquad \text{con} \quad Q = \text{carga total dentro de } V.$$

La fórmula no depende de que Q provenga de una carga o de muchas, incluso podría venir de infinitas cargas infinitesimales. Consideremos este caso suponiendo que hay una densidad de carga ρ de modo que en cada región sólida R la carga es $\int_R \rho$. De nuevo por el teorema de la divergencia,

$$\int_{\partial V} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} Q = \epsilon_0^{-1} \int_V \rho \qquad \text{implica} \qquad \int_V \left(\operatorname{div} \vec{E} - \epsilon_0^{-1} \rho\right) = 0.$$

Si esta última fórmula se cumple para cualquier V, el integrando es nulo y se sigue la primera ecuación de Maxwell, que según lo visto equivale a su forma integral $\int_{\partial V} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} \int_V \rho$.

Es justo decir que para cargas en movimiento la ley de Coulomb es falsa y por tanto la deducción anterior falaz. Sin embargo, la primera ecuación de Maxwell se muestra coherente con todas las experiencias realizadas.

Si vemos las líneas de fuerza de un imán, por ejemplo con limaduras de hierro en un papel sobre el imán, obtendremos algo similar a las de un dipolo eléctrico (dos cargas muy próximas de signos opuestos). Éste y otros experimentos sugieren que el campo magnético (en el caso estático) se comporta de forma similar al campo eléctrico aunque nadie escriba una ley de Coulomb porque no se han descubierto *monopolos magnéticos*: siempre las "cargas magnéticas" parecen venir en parejas (los dos polos de un imán). Entonces las cargas totales o las densidades en el argumento anterior son siempre nulas y se obtiene una segunda ecuación de Maxwell similar a la primera con $\rho = 0$. En forma integral se escribiría como $\int_{\partial V} \vec{B} = 0$.

Un experimento sencillo, base de la dinamo, nos muestra que si movemos un imán dentro de una espira conductora C, las cargas circularán y darán lugar a una corriente eléctrica. Cuanto más rápido movamos el imán y cuanto mas intensidad (flujo) pase por la superficie que limita la espira, mayor será el efecto. Esto sugiere

$$\int_C \vec{E} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \qquad \text{con} \quad \partial S = C.$$

Ésta es tercera ecuación de Maxwell en forma integral. El signo negativo es sólo para respetar convenciones acerca del sentido de giro. La constante de proporcionalidad es 1 porque así se han elegido las unidades. Aplicando el teorema de Stokes clásico a la primera integral e introduciendo la derivada con respecto a t en la segunda, se tiene

$$\int_S \Big(\text{rot } E + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\Big) = 0.$$

Como S es arbitraria, el integrando debe ser nulo y obtenemos la tercera ecuación de (1).

La cuarta ecuación de Maxwell y la conservación de la carga

Experimentalmente, se observa que una corriente eléctrica crea un campo magnético con circulación proporcional a su intensidad. Ésta es la la *ley de Ampère*. Por ejemplo, es bien conocida la *experiencia de Ørsted* de 1820, consistente en que la aguja de una brújula se desvía cuando hay una corriente eléctrica cercana.

Como ya hemos apuntado, la corriente eléctrica viene dada por $\rho\vec{v}$, entonces, en analogía con los resultados anteriores, parece natural escribir,

$$\int_C \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = \mu_0 \int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

donde $C = \partial S$ y μ_0 queda definida como la constante de proporcionalidad necesaria. Por el teorema de Stokes clásico, esta fórmula se reescribe en forma diferencial como

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0\rho\vec{v} \qquad \text{(no es correcta)}. \tag{3}$$

La cuarta ecuación de Maxwell añade un término más. Veamos el razonamiento matemático que llevó a Maxwell a pensar que (3) era falsa.

Las cargas en una región sólida V sólo pueden perderse por la superficie frontera ∂V, así pues la variación de la carga en V debe estar compensada con el flujo de cargas a través de ∂V. Matemáticamente

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho = -\int_{\partial V} \rho\vec{v}, \qquad \text{que equivale a} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho\vec{v}).$$

Esto contradice (3) al tomar divergencias porque la divergencia del rotacional es siempre nula y sin embargo ρ puede variar con el tiempo. Hagamos la hipótesis de que a (3) le falta un sumando Λ (necesariamente imperceptible en los experimentos habituales). Esto es, rot $\vec{B} = \mu_0\rho\vec{v} + \Lambda$. Para que todo sea coherente con div rot $\vec{B} = \vec{0}$, debe cumplirse div $\Lambda = \mu_0 \partial\rho/\partial t$. Teniendo en mente la primera ecuación de Maxwell, la elección natural es $\Lambda = \epsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$ y se llega a la *ley de Ampère-Maxwell*

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0\rho\vec{v} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Ésta es la cuarta ecuación de (1).

Las ondas electromagnéticas

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes (2). Claramente campos vectoriales constantes $\vec{E}$ y $\vec{B}$ las satisfacen pero hay también soluciones no triviales (véase [FLS64] para la solución general de las ecuaciones de Maxwell). Veamos una importante propiedad que tienen todas ellas en común.

Si derivamos la cuarta ecuación respecto de t y sustituimos la tercera, se sigue

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -(\epsilon_0\mu_0)^{-1}\text{rot rot } \vec{E}.$$

Una identidad del cálculo vectorial afirma $\Delta\vec{F} = \nabla\big(\text{div } \vec{F}\big) + \text{rot rot } \vec{F}$ donde $\Delta\vec{F}$ significa el *laplaciano* de cada componente del campo. Es decir,

$$\Delta\vec{F} = \big(\Delta F^1, \Delta F^2, \Delta F^3\big) \qquad \text{con} \qquad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Con esto se sigue que cada componente de $\vec{E}$ satisface la *ecuación de ondas*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\epsilon_0\mu_0)^{-1}\Delta u.$$

Un razonamiento similar prueba que las componentes de $\vec{B}$ tienen la misma propiedad.

Esto sugiere que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se pueden transmitir como ondas en el espacio vacío. Son las *ondas electromagnéticas*, cuya existencia conjeturó Maxwell. El factor $(\epsilon_0\mu_0)^{-1}$ en la ecuación anterior corresponde al cuadrado de la velocidad de la onda. Maxwell se percató, con los datos experimentales de la época, de que el valor de $(\epsilon_0\mu_0)^{-1}$ guardaba cierta similitud con el de c^2, donde c es la *velocidad de la luz* (hoy sabemos que son iguales), y conjeturó también que la luz era una onda electromagnética.

Alrededor de 1887, H. Hertz logró producir en su laboratorio ondas electromagnéticas con chispas y detectarlas unos metros más allá [Her90]. Además comprobó que poseían propiedades de reflexión y refracción análogas a las de la luz y que viajaban a la misma velocidad. En el plano teórico, Hertz contribuyó a la formulación actual de las ecuaciones de Maxwell.

La razón básica para la existencia de ondas electromagnéticas es que las fuerzas eléctricas y magnéticas no son fuerzas instantáneas (a diferencia del modelo de gravedad de Newton). C.F. Gauss fue el primero en predecirlo aunque su teoría electromagnética no fuera la correcta y tuvo que ser reformada por Maxwell.

A finales del siglo XIX había grandes evidencias experimentales de que las ecuaciones de Maxwell eran correctas pero surgía un problema teórico. Intrínsecamente se deberían aplicar a observadores en movimiento porque, por ejemplo, una carga eléctrica estática no genera campo magnético desde el punto de vista de un observador situado en ella pero sí lo hace para un observador en movimiento. Sin embargo las ecuaciones de Maxwell no son invariantes por los cambios clásicos de sistema de referencia entre observadores en movimiento. En términos matemáticos, una onda que satisface $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ deja en general de cumplir esta ecuación si x se reemplaza por $x + vt$. La *teoría especial de la relatividad*, cuyo nacimiento se concreta en el famoso artículo de A. Einstein "Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento" [Ein05] ([LEMW]), tomó la solución revolucionaria de permitir que el tiempo dependiese del observador para preservar la veracidad de las ecuaciones de Maxwell.

Referencias

[Ein05] A. Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.

[FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.

[Her90] H. Hertz. *Las ondas electromagnéticas.* Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990.

[LEMW] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl. *The principle of relativity.* A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity. Dover Publications Inc., New York, N. Y.

[Max54] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism.* Dover Publications Inc., New York, 1954. 3d ed, Two volumes bound as one.