Mecánica analítica I

La mecánica vectorial de Newton

Una de las fórmulas más conocidas de la Física (con permiso de $E = mc^2$) es la *segunda ley de Newton*

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{1}$$

Más allá de la intención de I. Newton al formular (1) con palabras en sus *Principia Mathematica* [New99]; el caso es que hemos resuelto algún problema y aprobado algún examen con el método de escribir la *fuerza* $\vec{F}$ que nos daban (quizá más o menos escondida) y resolver una ecuación diferencial, ya que la *aceleración* $\vec{a}$ de una partícula es por definición la derivada segunda de la ecuación de movimiento $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Por cierto, si alguien no ha abierto nunca un libro de Física, encontrará informativo que m es la *masa* de la partícula, que en (1) debe ser constante.

En lo sucesivo supondremos que la fuerza proviene de un *potencial*, es decir,

$$\vec{F} = -\nabla V \qquad \text{para cierta función } V = V(\vec{x}).$$

Esta V tiene unidades de *energía* y la suposición tiene que ver con cierta forma de conservación, por eso se dice que $\vec{F}$ es una *fuerza conservativa*. Equivale a $\int_C \vec{F} = 0$ para cada curva cerrada C gracias al teorema de Stokes, porque $\nabla \times \nabla V = 0$.

Por ejemplo, en las cercanías de la superficie de la Tierra, la fuerza de la gravedad es $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ donde g es una constante, la *aceleración de la gravedad*, que en el Sistema Internacional es aproximadamente 9.8 ms^{-2}. El potencial correspondiente viene dado por $V(x, y, z) = mgz$, determinado salvo sumar una constante. Las ecuaciones diferenciales que corresponden a (1) son

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} = -g, \tag{2}$$

donde se ha escrito $\ddot{x}$ en vez de x'' para indicar dos derivadas de x con respecto del tiempo, como es habitual en mecánica, y lo mismo con las otras variables.

Al integrar estas ecuaciones, se obtiene

$$\vec{x}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}(0, 0, -g)t^2 \tag{3}$$

que es la trayectoria parabólica de toda la vida. El nombre de las constantes de integración $\vec{s}_0$ y $\vec{v}_0$ es lógico porque son el espacio (*<u>s</u>pace*) inicial y la <u>v</u>elocidad inicial.

¿Qué ocurre si ahora cambiamos de coordenadas? Por ejemplo, dejemos y como está y escribamos x y z en polares con $x = r\cos\theta$, $z = r \operatorname{sen}\theta$. La ecuación (1) no se aplica al sistema de coordenadas (r, y, θ), es decir, sustituir $\vec{a}$ por $(\ddot{r}, \ddot{y}, \ddot{\theta})$ no lleva a algo equivalente.

Mirando al resultado (3) está claro, ya que la parábola no tiene una fórmula sencilla en las nuevas coordenadas. Visto de otra forma, (2) se complicará bastante al cambiar a polares porque hay que hacer derivadas segundas de productos.

En conclusión, geométricamente esta manera de resolver problemas de mecánica no es invariante por cambios de carta. Los vectores $\vec{F}$ y $\vec{a}$ no se transforman como verdaderos vectores de $T\mathbb{R}^3$, lo cual es lógico porque $\vec{a}$ está definido con derivadas derivadas segundas en vez de con derivadas primeras.

La formulación lagrangiana

Seguimos pensando en una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza que deriva de un potencial $V = V(x, y, z)$ que depende sólo de la posición.

Consideramos la siguiente expresión a la que llamaremos *lagrangiano* de la partícula libre:

$$L = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\big) - V(x, y, z). \tag{4}$$

El primer sumando es la *energía cinética* que en este contexto se suele denotar con T. Es un lagrangiano en el sentido que habíamos definido antes, pues da una aplicación $L : T\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ identificando $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ con las coordenadas de un vector tangente y (x, y, z) con el punto que le corresponde.

Escribamos ahora la segunda ley de Newton (1) de la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\Big) = \frac{\partial L}{\partial q^i}} \tag{5}$$

donde $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$. Verificar que esta fórmula equivale a (1) con la elección (4) del lagrangiano, es una trivialidad. Por ejemplo, para $i = 1$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_1$$

y lo mismo con el resto de las variables. Lo curioso es que LAS ECUACIONES (5) SON INVARIANTES POR CAMBIOS DE CARTA. Es obligatorio sorprenderse para quien no haya estudiado (5) antes. Se puede dar una prueba directa de este hecho escribiendo minuciosamente el efecto de un cambio de carta [HSS09, Prop.1.31] pero la prueba "buena" pasa por apelar al cálculo de variaciones. A (5) se les llama *ecuaciones de Euler-Lagrange*, pues fueron introducidas en el siglo XVIII por L. Euler y J.-L. Lagrange.

Consideremos, por ejemplo, el cambio a las coordenadas extrañas introducidas antes. Un sencillo cálculo prueba que el lagrangiano (4) se escribe en estas coordenadas como

$$L = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + \dot{y}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big) - mgr\operatorname{sen}\theta.$$

Las ecuaciones (5) con $(q^1, q^2, q^3) = (r, y, \theta)$ son

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = -mg\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -mgr\cos\theta.$$

Hay que tener en cuenta, para derivar el último producto, que las coordenadas se consideran funciones de t para que definan una curva (la *trayectoria*). De este modo se llega a

$$(6) \qquad \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -g\cos\theta.$$

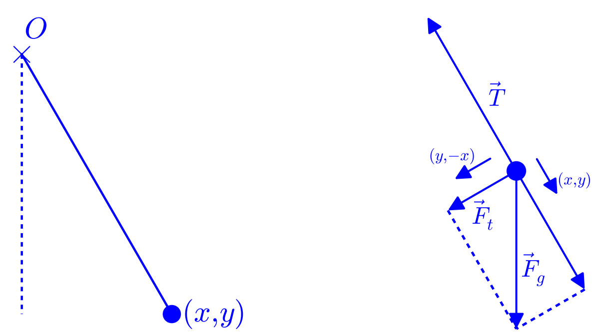
Si nos empeñásemos en escribir, por ejemplo, la primera ecuación en cartesianas sustituyendo $r = (x^2+z^2)^{1/2}$ y $\theta = \arctan(z/x)$, después de un rato haciendo cuentas, obtendríamos

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x\ddot{x} + z\ddot{z} + gz}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

y vemos que (2) implica la primera de las ecuaciones de (6)-

A pesar de que matemáticamente sea espectacular la invariancia de (5) por cambios de carta, desde el punto de vista práctico el problema era fácil en coordenadas cartesianas y lo único que hemos hecho es complicarlo. El cambio de carta no añade nada a la solución.

Las cosas se ponen más interesantes cuando hay ligaduras porque allí la mecánica vectorial introduce fuerzas poco obvias para el principiante (habitualmente *tensiones*) motivadas por la *tercera ley de Newton* (el principio de acción y reacción). Uno de los ejemplos más sencillos es el *péndulo simple*: una masa m que oscila colgada de un alambre inextensible.



$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{T}$$

$$\vec{F}_g = (0, -mg)$$

$$\vec{F}_t = \frac{mg}{l^2}x(y,-x)$$

Si la masa está en (x,y) la *tensión* del alambre tiene que compensar todas la fuerzas que van en la dirección (x,y), que es normal al movimiento, porque si no la partícula se desprendería del péndulo. Entonces los dos miembros de (1) sólo pueden ser no nulos en la dirección tangencial $(y,-x)$, perpendicular a la anterior, resultando

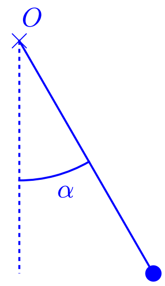
$$\mathrm{Proy}_{(y,-x)}(0,-mg) = \mathrm{Proy}_{(y,-x)}(m\ddot{x}, m\ddot{y}).$$

Calculando las proyecciones con el producto escalar, se llega a la ecuación diferencial

$$y\ddot{x} - x\ddot{y} = gx \qquad \text{sujeta a la ligadura} \quad x^2+y^2 = l^2,$$

con l la longitud del péndulo. La ligadura es la manifestación de que las fuerzas normales al movimiento se han cancelado. Evidentemente, el péndulo simple no se cuenta así en los cursos básicos de mecánica. Allí se hace un estudio previo de aceleraciones normales y tangenciales en el movimiento circular, que dan la excusa para introducir el ángulo sin deshacerse de la tensión.

Supongamos que lo que hemos hecho de mecánica lagrangiana sin ligaduras sirve igualmente cuando están presentes. La coordenada generalizada más natural es el ángulo y tenemos que referir el lagrangiano a ella:



$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) - mgy$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl\cos\alpha$$

donde se ha usado la relación entre las coordenadas $x = l\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $y = -l\cos\alpha$. Entonces (5) se traduce en

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial\alpha} \qquad \text{que corresponde a} \qquad \frac{d}{dt}\big(ml^2\dot{\alpha}^2\big) = -mgl\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

y se llega inmediatamente a la ecuación del péndulo:

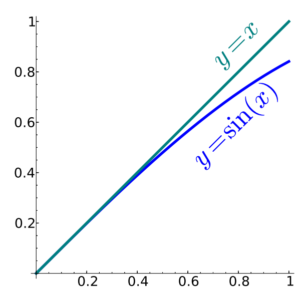
$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0. \tag{7}$$

Esta ecuación no tiene solución en funciones elementales pero es suficientemente amable como para que los métodos numéricos funcionen bien. Además la aproximación de pequeñas oscilaciones es muy simple (y mejor de lo que parece). En ese caso $\mathrm{sen}\,\alpha$ se sustituye α y la ecuación se vuelve lineal y es muy fácil de resolver. A veces se considera esto una buena aproximación cuando la oscilación es menor que $20^\circ = \pi/9$.

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \\ \alpha(0) = \alpha_0, \quad \alpha'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0\cos\Big(t\sqrt{\frac{g}{l}}\Big)$$

$$\sin\frac{\pi}{9} = 0.3420\ldots, \ \frac{\pi}{9} = 0.3490\ldots$$



La ecuación lineal da una solución de periodo $2\pi\sqrt{l/g}$, independientemente de la amplitud inicial α_0. Con $l = 1m$ se obtiene casi $2s$ y es sorprendente la precisión que se obtiene en un experimento casero a pesar de que el rozamiento con el aire va reduciendo la amplitud.

En problemas mecánicos más complicados, quizá con varias partículas (o incluso infinitas), el mismo procedimiento funciona, tomando

$$L = T - V \tag{8}$$

donde T y V son, respectivamente, la *energía cinética* y la *energía potencial* totales. La primera es la suma de las energías cinéticas de las partículas que forman el sistema (la segunda puede incluir también interacciones entre ellas). Por ejemplo, en el caso del péndulo doble ya habíamos calculado:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\big(l_1^2\dot{\alpha}^2 + l_2^2\dot{\beta}^2 + 2l_1l_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)\big)$$

y la suma de los potenciales para ambas partículas es

$$V = (m_1+m_2)gl_1\cos\alpha + m_2gl_2\cos\beta.$$

Al aplicar (5) obtendremos dos ecuaciones diferenciales que son tratables numéricamente y además el caso de pequeñas oscilaciones es susceptible de linealización como antes. Dicho sea de paso, es increíble lo caótico que es el movimiento de un péndulo doble fuera del caso de pequeñas oscilaciones.

Más ejemplos y un tratamiento más extenso se pueden encontrar en cualquier libro de mecánica analítica [Gol80] [LL76].

El principio de Hamilton y el cálculo de variaciones

Si bien claramente las ecuaciones (5) implican la ley de Newton (1) para una partícula libre, no está claro por qué ocurre lo mismo en un sistema con ligaduras. Una explicación que convencerá a los que tengas ciertos conocimientos (o intuiciones), es que las ligaduras equivalen a poner una barrera de potencial, es decir, a declarar que se necesitaría demasiada energía para salirse de esa subvariedad tomando V muy grande fuera de ella [Arn78, 17]. Matemáticamente, si se parte de que las fuerzas de ligadura son ortogonales a las subvariedades que definen las ligaduras (recuérdese la tensión en el caso del péndulo simple), es posible hacer un teorema de la implicación buscada [Hol11, §2.2.2] [HSS09, §1.3].

Sin embargo, la gran pregunta matemática es por qué las ecuaciones (5) son invariantes por cambios de carta. La respuesta es que equivalen a que la *acción*

$$S = \int_a^b L\,dt \tag{9}$$

sea estacionaria, es decir que no aparezcan términos de orden uno cuando se perturba ligeramente la curva $\vec{q} = \vec{q}(t)$ sobre la que se integra manteniendo los extremos fijos. Esta curva estacionaria tiene un significado intrínseco, independientemente de las parametrizaciones usadas correspondientes a cambios de carta.

En algunos textos de Física [LL76], especialmente en los más clásicos, se postula que S es mínima para los lagrangianos mecánicos de (8). Es decir:

> Principio de mínima acción. *Si en los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$ el sistema ocupa posiciones que se caracterizan por dos conjuntos de valores de las coordenadas, entonces entre estas posiciones el sistema se moverá de manera que la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ tiene el menor valor posible.*

Es más preciso hablar de un principio de acción estacionaria, pues no en todas las situaciones se tiene un mínimo [GT07]. Éste es el llamado *principio de Hamilton*, pues fue W.R. Hamilton. Se postula como un principio básico de la mecánica, una especie de axioma.

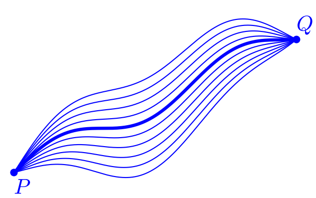
La deducción de (5) a partir de la acción (9), es parte del *cálculo de variaciones* que se ocupa de estudiar extremos de funcionales (funciones de funciones) y no depende de que el lagrangiano venga de (8). Sin entrar en detalles, todo el argumento (en $\mathbb{R}^n$) es que si definimos la función real

$$f(\epsilon) = \int_a^b L(t, \gamma(t) + \epsilon\alpha(t), \dot{\gamma}(t) + \epsilon\dot{\alpha}(t))\, dt$$

donde γ es la curva que da un valor estacionario, $\alpha(0) = \alpha(0) = \vec{0}$ y ϵ es pequeño; la condición $f'(0) = 0$ lleva tras integrar por partes a

$$0 = \int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial q^k}\alpha^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{\alpha}^k \Big) = \int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\big) \Big)\alpha^k$$

donde α^k son las componentes de α. Como éstas son arbitrarias, la única posibilidad para que la integral sea siempre nula es que se cumpla las ecuaciones de Euler-Lagrange (5).



$\gamma =$ curva gruesa

$\gamma + \epsilon\alpha =$ curvas finas (ϵ variable)

$P = \gamma(a), \quad Q = \gamma(b)$

Por supuesto la utilidad del cálculo de variaciones excede el ámbito de la mecánica y dentro de la geometría diferencial más básica, ya encuentra aplicaciones.

Por ejemplo, más adelante en el curso veremos un resultado que generaliza el hecho de que para una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$, las geodésicas se obtienen tomando como L la primera forma fundamental, $L = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$, y resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Otro ejemplo, es que si buscamos una superficie de revolución de área mínima cuyo borde es las circunferencias de radio 2 a alturas $z = \pm 1$, entonces debemos resolver (5) con $L = 2\pi y\big(1 + (y')^2\big)^{1/2}$ ya que justamente el área viene dada por $A = \int_{-1}^{1} L$.

La conservación de la energía

Dado un lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ se define la *energía* asociada a L como

$$E = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \qquad (10)$$

La propia notación tensorial nos indica que es un escalar, un tensor $(0, 0)$, y por tanto no depende de la elección de la carta. Si usamos el langrangiano que corresponde a una partícula libre (4), se tiene $E = T + V$, es decir, que E es la *energía total*, la suma de la energía cinética y potencial.

La cantinela tantas veces repetida de que la energía ni se crea ni se destruye, tiene su traducción matemática en que E es constante a lo largo de cualquier solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (5). Esto se reduce a un cálculo directo:

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{q}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L\Big) = \ddot{q}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\Big) - \Big(\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i\Big) = 0.$$

Como cualquier otra ley de conservación, la de la energía nos da una mayor intuición acerca del comportamiento de un sistema mecánico y simplifica a menudo los cálculos. Veremos dos ilustraciones sencillas de este último punto.

Como primer ejemplo, recordemos la ecuación del péndulo simple (7), que es una ecuación de segundo orden. Si en lugar de usar (5), empleamos la conservación de la energía, se tiene

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - mgl\cos\alpha = \text{cte.}$$

El resultado es una ecuación de primer orden

$$\dot{\alpha}^2 - 2\frac{g}{l}\cos\alpha = \text{cte}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{du}{\sqrt{\text{cte} - 2gl^{-1}\cos u}} = t,$$

donde $\alpha(0) = \alpha_0$. La constante se determina con las condiciones iniciales. La integral es una *integral elíptica*, sobre la que hay mucha literatura y métodos de aproximación.

Un segundo ejemplo es el problema de hallar la superficie de revolución de área mínima cuyo borde es las circunferencias de radio 2 a alturas $z = \pm 1$, que habíamos mencionado antes. Las ecuaciones (5) con $L = 2\pi y\big(1 + (y')^2\big)^{1/2}$ son un poco feas por la presencia de la raíz cuadrada y se hace un poco difícil encontrar la solución explícita. La energía es en este caso

$$E = y'\frac{yy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - y\sqrt{1 + (y')^2} = -\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

No es difícil separar variables e integrar el resultado para hallar la función buscada $y = y(z)$:

$$\frac{y'}{\sqrt{(y/E)^2 - 1}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(z) = E\cosh(z/E + C)$$

donde C es una constante. Tanto E como C se obtienen a partir de las condiciones de borde $y(1) = y(-1) = 2$, resultando $E = 1.69\dots$ y $C = 0$.

Esta superficie cuya generatriz viene dada por un coseno hiperbólico se llama *catenoide* y fue el propio Euler quien probó por primera vez sus propiedades minimizantes. Su generatriz, es decir, la gráfica del coseno hiperbólico, se llama *catenaria* y es la curva que describe un cable colgado entre dos postes.

Un ejemplo destacado

El modelo matemático por excelencia es el relativo al movimiento planetario a partir de la *ley de gravitación universal*. Ocupa un lugar principal en la historia de la Ciencia y también en la del pensamiento, pues propició las ideas de la Ilustración acerca de la capacidad de la razón y la importancia del progreso científico.

La fuerza ejercida por el Sol sobre cada planeta (considerados por separado, sin influencias mutuas) es, según la ley de gravitación universal

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}$$

donde G es una constante, M es la masa del Sol, m es la masa del planeta, r es la distancia entre ellos y $\vec{u}$ es el vector unitario desde el Sol en la dirección al planeta.

Al sustituir en (1) y simplificar m, la ecuación de movimiento del planeta $\vec{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ es solución de la ecuación diferencial

$$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = -\frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x, y, z). \tag{11}$$

No hay que dejarse engañar por su aparente sencillez. De hecho este sistema no tiene solución explícita en términos de t (sólo a través de integrales elípticas, como las del péndulo simple). A pesar de ello, según la *primera ley de Kepler* (experimental hasta Newton) la trayectoria de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos. En leguaje actual, lo que hizo Newton fue probar este hecho a partir de (11). Esto es realmente difícil con las técnicas matemáticas que aprendemos hoy en día en los cursos de ecuaciones diferenciales. Es casi obligado emplear varios trucos físicos.

Aquí sólo emplearemos un truco, que en realidad será más sistemático más adelante. Consiste en notar que $\vec{v} = (x, y, z) \times (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ tiene derivada cero y por tanto es un vector constante y como $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$, la trayectoria está en un plano (el caso $\vec{v} = \vec{0}$ es especial pero lleva a la misma conclusión). Otra forma, mas complicada, de llegar a lo mismo es usar la fórmula para la torsión de la curva $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Físicamente, con un poco de intuición, nos podemos saltar estos argumentos pensando en cómo modifica la posición en tiempos próximos una fuerza central.

Por la simetría esférica del problema, reflejada en (11), se puede fijar (girando la cabeza) $z = 0$ como el plano en el que transcurre el movimiento. A partir de aquí todo es bastante sistemático utilizando mecánica lagrangiana.

Teniendo en cuenta que $z = 0$ y que $-\nabla r^{-1} = -r^{-2}\vec{u}$, tomamos, según (8),

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{GMm}{(x^2+y^2)^{1/2}}.$$

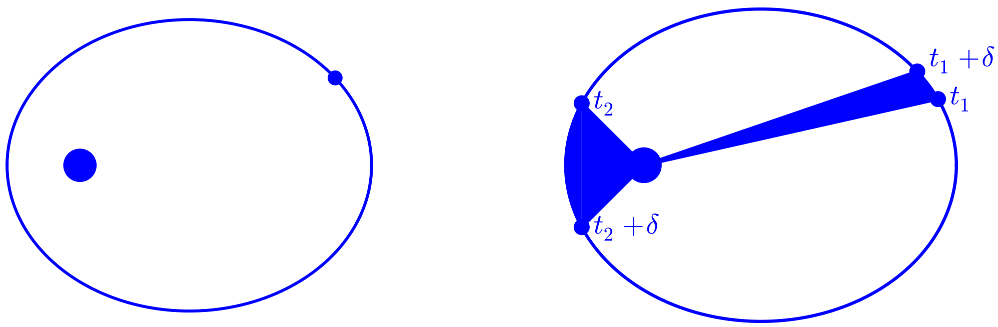
La aparición de $x^2 + y^2$ sugiere utilizar coordenadas polares (r, θ) como coordenadas generalizadas y con ellas

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2}, \qquad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

De la segunda, dejada sin operar a propósito, se deduce que $r^2\dot{\theta}$ es una constante, digamos h, en cada trayectoria. Por cierto, esto prueba la *segunda ley de Kepler*: *el vector $\vec{x}$ barre áreas iguales en tiempos iguales*, simplemente usando la fórmula que calcula el área en polares.



Primera ley de Kepler

Segunda ley de Kepler

Ahora podemos usar $r^2\dot{\theta} = h$ para sustituir en la primera de las ecuaciones de Euler-Lagrange y así obtener una sola ecuación diferencial de segundo orden. Siguiendo la experiencia de los ejemplos anteriores, utilizamos la energía (10), que empleando $r^2\dot{\theta} = h$ se convierte en

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}.$$

Si queremos estudiar como varía r en función de θ debemos considerar (con el abuso de notación habitual en la regla de la cadena)

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{\dot{r}}{hr^{-2}} \qquad \text{que implica} \qquad \frac{dr}{d\theta} = h^{-1}r^2\Big(\frac{2E}{m} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2GM}{r}\Big)^{1/2}.$$

Esta última ecuación quizá parezca más complicada que la de partida pero se puede integrar. Completando cuadrados, el segundo miembro se escribe como $K_1^{-1}r^2\big(1-(K_1r^{-1}-K_2)^2\big)^{1/2}$ con K_1 y K_2 constantes en función de E/m, h y GM, por ejemplo, $K_1 = hm^{1/2}(2E)^{-1/2}$. Entonces

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{d(K_1/r - K_2)/dr}{\sqrt{1-(K_1r^{-1}-K_2)^2}} = \frac{d}{dr}\big(\operatorname{arc}\cos(K_1r^{-1}-K_2)\big) \ \Rightarrow\ \theta(r) = \operatorname{arc}\cos(K_1r^{-1}-K_2),$$

donde se ha elegido una constante de integración nula (lo cual equivale a especificar cierto origen de ángulos). Esto se escribe de una manera más atractiva como

$$r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad \text{con } p \text{ y } e \text{ constantes,}$$

que es la ecuación de una cónica de excentricidad e escrita en polares (centradas en uno delos focos). Si sustituyéramos datos reales de los planetas, obtendríamos que $0 \leq e < 1$, lo que corresponde a una elipse. De hecho no hay duda porque las otras cónicas (parábola e hipérbola) no son cerradas.

A pesar del enunciado de la ley de Kepler, las órbitas de los planetas (con la excepción de Mercurio) tienen excentricidades pequeñas y la ecuación anterior se parece bastante a la circunferencia $r = p$. En el caso de la Tierra $e = 0.017$, lo que significa que si hiciéramos un dibujo a escala de la órbita con un eje mayor de $1m$, el otro sería alrededor de $0.14mm$ más corto. Esto es totalmente inapreciable a simple vista.

Referencias

[Arn78] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer-Verlag, New York, 1978. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein, Graduate Texts in Mathematics, 60.

[Gol80] H. Goldstein. *Classical mechanics.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1980. Addison-Wesley Series in Physics.

[GT07] C. G. Gray and E. F. Taylor. When action is not least. *Am. J. Physics.*, 75(5):434–458, 2007.

[Hol11] D. D. Holm. *Geometric mechanics. Part I.* Imperial College Press, London, second edition, 2011. Dynamics and symmetry.

[HSS09] D. D. Holm, T. Schmah, and C. Stoica. *Geometric mechanics and symmetry*, volume 12 of *Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2009. From finite to infinite dimensions, With solutions to selected exercises by David C. P. Ellis.

[LL76] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of theoretical physics. Vol. 1.* Pergamon Press, Oxford, third edition, 1976. Mechanics, Translated from the Russian by J. B. Skyes and J. S. Bell.

[New99] I. Newton. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy.* University of California Press, Berkeley, CA, 1999. A new translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, assisted by Julia Budenz, Preceded by "A guide to Newton's *Principia*" by Cohen.