Series de potencias

Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso: Análisis Matemático I   Profesor: Fernando Chamizo

1. Radio de convergencia

Una *serie de potencias* es una serie del tipo

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{con} \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Este tipo de series aparece con frecuencia en problemas de física e ingeniería en los que z se considera como una variable (compleja, en general). Aplicando el criterio del cociente o de la raíz, se tiene que S converge absolutamente si

$$|z| < \frac{1}{\ell} \qquad \text{con} \quad \ell = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{o} \quad \ell = \lim \sqrt[n]{|a_n|},$$

dando por supuesto que alguno de estos límites existen (si ambos existen, siempre coinciden). Por otro lado, si $|z| > 1/\ell$ es fácil ver que $|a_n z|^n \to \infty$ y por tanto S diverge.

A $R = 1/\ell$ se le llama *radio de convergencia* porque S converge (absolutamente) en el círculo $|z| < R$, llamado a veces *círculo de convergencia absoluta*, y diverge en $|z| > R$. Lo que ocurre en la propia circunferencia $|z| = R$ depende de cada caso y es, en general, muy difícil de estudiar. Se admiten los casos extremos $R = 0$ y $R = \infty$, provenientes de $\ell = 0$ y $\ell = \infty$, que corresponden a que la serie no converja para ningún $z \neq 0$ o que converja para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por ejemplo, calculemos el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)n^{-1}\big(2^n+1\big)^{-1} z^n$. Se tiene

$$\ell = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{n\big(2^{n+1}+1\big)}{(n+1)\big(2^n+1\big)} = \lim \frac{2 + 1/2^n}{(1+1/n)\big(1+1/2^n\big)} = 2,$$

donde en la penúltima igualdad se han dividido numerador y denominador por $n2^n$. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1/2$.

En la siguiente sección, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ tendrá cierto protagonismo. Comprobemos que su radio de convergencia corresponde a uno de los casos extremos:

$$\ell = \lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \infty.$$

Es decir, la serie converge para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

Casi siempre que el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ exista, es más cómodo decidir el radio de convergencia a través del criterio del cociente, pero hay excepciones. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ es una de ellas que también constituye un caso extremo. Se tiene $\ell = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim n = \infty$. Así pues, $R = 0$ y la serie no converge para ningún valor excepto para $z = 0$.

No entraremos aquí en las dificultades que derivan de que uno puede buscar ejemplos raros en que ni el límite correspondiente al criterio del cociente ni al de la raíz existan (ni sean infinito). Hay una manera de remediarlo que requiere el concepto de *límite superior*, que no se ha tratado en el curso.

Una característica muy importante de las series de potencias es que dentro del radio de convergencia se comportan como "polinomios infinitos", en el sentido de que se pueden sumar, restar, multiplicar, componer, derivar e integrar de la manera esperada, preservando la convergencia.

Por ejemplo, consideremos $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/\sqrt{n}$ cuyo radio de convergencia es $R = 1$ porque $\lim \sqrt{n}/\sqrt{n+1} = 1$. Por tanto, tiene sentido su definición en $|z| < 1$ y allí su derivada es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, z^{n-1}$ que también puede escribirse como $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, z^n$.

2. Series de Taylor

Algunos polinomios de Taylor alrededor del origen cumplen que cuando el grado crece indefinidamente, el error en la segunda versión del teorema de Taylor tiende a cero. En esa situación, se establece una identidad entre la función y la serie de potencias que surge como límite de los polinomios de Taylor, llamada *serie de Taylor*. Por ejemplo, para $f(x) = e^x$ sabíamos que $T_n(f, 0) = 1 + x/1! + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$ y se tiene

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo x debido a que el error, dado por $e^{\xi} x^{n+1}/(n+1)!$, tiende a cero, aunque no lo comprobaremos.

En realidad, hay un bello teorema, fuera del ámbito del curso, que afirma que para funciones que sean derivables al considerar su variable compleja, no es necesario entrar en consideraciones sobre el error, siempre la serie de Taylor coincide con la función en el círculo de convergencia absoluta.

Para el seno y del coseno también hay series de Taylor que convergen a estas funciones. Concretamente,

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Los polinomios de Taylor alrededor del origen de estas funciones son fáciles de hallar con lo que sabemos. Lo único que hemos hecho es poner un número arbitrariamente grande de términos. Supongamos ahora que deseamos calcular un polinomio de Taylor, por ejemplo $T_{10}(f,0)$, para $f(x) = e^{x^2}$. Esto conllevaría bastantes cálculos porque no parece haber una manera sencilla de derivar hasta diez veces esta función. Sin embargo, por lo dicho anteriormente, es lícito componer las series de potencias y así, sustituyendo x^2 en e^x, se tiene $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/n!$. Truncando esta serie de Taylor, que es una especie de polinomio de Taylor infinito, obtenemos los de todos los grados, en particular,

$$T_{10}(f,0) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!}.$$

Veamos otro ejemplo. Por la suma de una progresión geométrica o por Taylor, sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{para} \quad -1 < x < 1.$$

El rango es consistente con que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sea 1. Componiendo con $-x^2$ e integrando entre 0 y x se obtiene

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \big(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots\big)\, dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

De nuevo, calcular $T_n(f,0)$ de $f(x) = \arctan x$ mediante la definición parece trabajoso porque no es evidente una fórmula para $f^{(n)}$, aunque realmente existe. Por otro lado, integrando sin componer, obtendríamos la serie de Taylor para $-\log(1-x)$.

Para terminar, solo por si tienes curiosidad, estudiemos dos cabos sueltos teóricos que habían quedado en el curso y que tienen que ver con la serie de Taylor de e^x. El primero es la misteriosa fórmula $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$. Si definimos e^z para $z \in \mathbb{C}$ por su serie, esto es, como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, que tiene radio de convergencia ∞, y hacemos lo mismo con $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ entonces es fácil ver que $e^{i\alpha}$ da lo mismo que $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$. El segundo cabo suelto es la prueba de que la derivada de e^x sea ella misma. De nuevo, definiendo e^x por su serie y sabiendo que las series de potencias se pueden derivar término a término, $(e^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}/n! = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/(n-1)! = e^x$. El hecho de que al derivar el rango de n empiece en $n = 1$ refleja que el término independiente desaparece.