Integrales

Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso: Análisis Matemático I Profesor: Fernando Chamizo

Las partes en letra pequeña de tono más claro no entran el curso 2023/24

1. El teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en $[a,b]$ el concepto de integral $\int_a^b f$ corresponde a dividir $[a,b]$ en subintervalos de longitud infinitesimal, multiplicarla por el valor de f en cada uno de ellos y sumar los resultados. Con más rigor, consideramos n subintervalos de longitud $h_n = (b-a)/n$ y definimos

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} h_n\big(f(a) + f(a+h_n) + f(a+2h_n) + f(a+3h_n) + \cdots + f(b)\big).$$

Cuando $f \geq 0$ este límite representa el área bajo la gráfica de una función $f(x)$. Si $a > b$ se define $\int_a^b f$ como $-\int_b^a f$.

La definición anterior refleja bien el significado geométrico, pero es demasiado complicada a la hora de obtener resultados explícitos. El *teorema fundamental del cálculo* afirma esencialmente que integrar es lo contrario que derivar. Más concretamente, una de las formas de su enunciado es que si f es continua en $[a,b]$ entonces la función $F(x) = \int_a^x f$ es derivable para todo $x \in (a,b)$ y $F'(x) = f(x)$.

Una función cuya derivada es una función dada, se dice que es una *primitiva* suya. Así, el resultado anterior asegura que $\int_a^x f$ es una primitiva de f. En términos prácticos, es más interesante una versión del teorema fundamental del cálculo llamada *regla de Barrow* que se resume en la fórmula:

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) \qquad \text{con } g \text{ una primitiva de } f.$$

Habitualmente se indica $g(b) - g(a)$ con $g(x)\big|_a^b$.

Cuando se muestra la variable de la función a integrar, se añade al final dx. Es decir, se escribe $\int_a^b f(x)\,dx$. Este dx, leído *diferencial* de x, es solo notación, aunque más adelante lo haremos participar en algunas técnicas de integración. Históricamente, el símbolo $\int$ es una deformación de una "s" refiriéndose a la suma que aparece en la definición original y dx representa la longitud infinitesimal de cada intervalo.

Con la regla de Barrow, el cálculo de integrales se reduce al de primitivas. Por ejemplo, $g(x) = x^3/3$ es una primitiva de $f(x) = x^2$ y por tanto,

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Eso es un gran avance con respecto a la complicación del límite de la definición. Con poco esfuerzo hemos visto que el área bajo la parábola $y = x^2$ sobre el eje x en $[0,1]$ es $1/3$. Resultados de este tipo ya eran conocidos por Arquímedes, pero requerían argumentos geométricos que hoy consideraríamos muy complejos.

Dos primitivas de una función difieren en una constante (esto es consecuencia del teorema del valor medio). Con $\int f$ se indican todas las primitivas de f, por ello su resultado se escribe sumando al final una K que representa una constante arbitraria. En el caso anterior,

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + K.$$

La terminología al uso es llamar *integrales indefinidas* al cálculo de todas las primitivas, esto es, a $\int f$, porque no se especifican límites, e *integrales definidas* a las que responden a la definición original que requiere un intervalo donde integrar.

Según el teorema fundamental del cálculo o la regla de Barrow, obtenemos una tabla de integrales leyendo la de derivadas al revés. De esta forma,

$$\begin{array}{lllllll}
\int x^\alpha\,dx &=& \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \quad (\alpha \neq -1), & \qquad & \int \cos x\,dx &=& \operatorname{sen} x + K,\\
\int e^x\,dx &=& e^x + K, & & \int \operatorname{sen} x\,dx &=& -\cos x + K,\\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \log|x| + K, & & \int \frac{1}{1+x^2}\,dx &=& \arctan x + K.
\end{array}$$

Aquí hay algún comentario que hacer. En el primer resultado, lo que dice la tabla de derivadas es que la derivada de x^α es $\alpha x^{\alpha-1}$. Lo que hemos hecho es cambiar α por $\alpha+1$ y dividir entre esta última cantidad. La derivada de $\log x$ es $1/x$ y no tiene sentido derivar $\log x$ en valores negativos, sin embargo sí tiene sentido calcular $\int_a^b x^{-1}\,dx$ con a y b ambos negativos y, por la simetría, debería dar lo mismo que $-\int_{-b}^{-a} x^{-1}\,dx = \log(-a) - \log(-b)$, de ahí el valor absoluto.

La regla de la cadena implica

$$\int f'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = f\big(g(x)\big) + K.$$

Las integrales que se deducen de la tabla y de una aplicación más o menos directa de esta fórmula se suelen llamar *integrales inmediatas*. Si piensas que el nombre es un eufemismo y los siguientes ejemplos te parece que están fuera de tu alcance, todavía tienes una oportunidad de llegar a los mismos resultados a través de la técnica de cambio de variable que veremos más adelante.

Consideremos

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{x^2+1}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{x-5}, \quad I_3 = \int \operatorname{sen}(5x)e^{\cos(5x)}\,dx, \quad I_4 = \int \frac{\cos x}{(2+\operatorname{sen} x)^2+1}\,dx.$$

En la primera integral debemos ver x como la derivada de x^2+1 salvo compensar un 2:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\cdot(2x)\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)+K.$$

Hemos usado que uno partido de una función integra como el logaritmo del valor absoluto de la función siempre que tengamos la derivada como factor. Siguiendo esta idea y que la derivada de $x-5$ es 1, la segunda integral es más sencilla y da $\log|x-5|+K$.

La tercera la tenemos que entender como la exponencial de una función de la que casi tenemos la derivada. Nos falta compensar un signo y un cinco:

$$I_3 = \int \operatorname{sen}(5x)e^{\cos(5x)}\,dx = -\frac{1}{5}\int \big(\cos(5x)\big)' e^{\cos(5x)}\,dx = -\frac{1}{5}e^{\cos(5x)}+K.$$

La última integral nos puede recordar a la primera, pero en realidad es diferente, porque $\cos x$ no es la derivada del denominador sino solo de la parte que está dentro del cuadrado. Por eso, debemos pensar en $\int(1+x^2)^{-1}\,dx$ y el resultado es $\arctan(2+\operatorname{sen} x)+K$.

2. Técnicas de integración

Hace no tantos años, los temarios de un primer curso de análisis matemático dedicaban bastante tiempo a desarrollar técnicas para integrar familias de funciones más o menos complicadas. Hoy en día esto tiene menos sentido porque el acceso a *software* matemático simbólico es prácticamente universal, incluso a través de sencillas aplicaciones *online*, y dicho *software* es capaz de resolver muchas de las integrales que admiten fórmulas explícitas y, en cualquier caso, superar con creces a los que estudiaron muchas técnicas de integración. De todas formas, al igual que la existencia de calculadoras no ha propiciado que nos olvidemos de la tabla de multiplicar, es conveniente disponer de un conocimiento somero de algunas técnicas de integración.

2.1. Integración por partes

Sabíamos que la derivada del producto fg era $f'g+fg'$. Despejando, eso se traduce en la fórmula de *integración por partes*:

$$\int fg' = fg - \int gf'.$$

Casi nunca se enuncia así, se suele escribir $u = f$, $v = g$ y como la notación de Leibniz dice $du/dx = f'$ y $dv/dx = g'$ se interpreta que $du = f'dx$ y que $dv = g'dx$. De este modo, el diferencial d pasa a ser más que el residuo de una notación histórica. Ahora actúa sobre funciones derivándolas y añadiendo al final dx. Con esta notación, la forma habitual de la fórmula de integración por partes es

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Hay varias reglas mnemotécnicas para recordarla. Por ejemplo, "**u**n **d**ía **v**i **u**n **v**iajero **v**estido **d**e **u**niforme". La fórmula será útil si tenemos un factor fácil de integrar y otro fácil de derivar de manera que en este proceso el nuevo producto simplifique la integral. Familias típicas a las que se aplica son todas las integrales de la forma $\int P(x)e^x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{sen} x\,dx$ o $\int P(x)\cos x\,dx$ donde P es un polinomio. Al tomar $u = P$ reduciremos paulatinamente el grado y acabaremos resolviendo la integral.

Por ejemplo, para hallar $\int(x^2 - 1)e^x\,dx$ elegimos $u = x^2 - 1$, $dv = e^x dx$, obteniéndose

$$\int (x^2-1)e^x\,dx = (x^2-1)e^x - 2\int xe^x\,dx$$

porque $du = 2x\,dx$ y $v = e^x$. La integral $\int xe^x\,dx$ se trata de igual forma por partes, con $u = x$, $dv = e^x dx$, lo que lleva a $xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + K$. En definitiva,

$$\int (x^2-1)e^x\,dx = (x^2-1)e^x - 2\big(xe^x - e^x\big) + K = (x^2-2x+1)e^x + K.$$

El procedimiento funciona también bajo cambios lineales en el argumento de la exponencial, el seno o el coseno. Así, con $u = x$ y $dv = e^{-x/2}\,dx$ debemos escribir $du = 1\,dx$ y $v = -2e^{-x/2}$, por tanto

$$\int xe^{-x/2}\,dx = -2xe^{-x/2} + 2\int e^{-x/2}\,dx = -2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + K.$$

La integración por partes también es útil para hallar $\int P(x)\log x\,dx$, con P un polinomio, pero esta vez debemos escoger $dv = P(x)\,dx$ porque $\log x$ no es "fácil" de integrar (y, en cualquier caso, complicaría la integral). A este respecto, una situación un poco excepcional es el caso $P = 1$ en el que la aplicación de la integración por partes parece extraña porque solo tenemos una función. Con $u = \log x$ y $dv = 1\,dx$ se sigue $\int \log x\,dx = x\log x - x + K$. Un truco similar funciona con las funciones trigonométricas inversas. Por ejemplo, con $u = \arctan x$ y $dv = 1\,dx$ se tiene

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Otro ejemplo un poco singular es $I = \int e^x \cos x\, dx$ y sus variantes. Al integrar por partes tomando $u = e^x$, $dv = \cos x\, dx$, la integral se traduce en otra similar con seno y con una segunda aplicación de integración por partes con $u = e^x$, $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ reaparece la integral original:

$$I = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \Big(- e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \Big).$$

Se obtiene la relación $I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I$ salvo constantes de integración, por tanto, despejando, $I = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + K$.

2.2. Integración de funciones racionales

Es posible calcular integrales de funciones racionales, esto es, de cocientes de polinomios P/Q, en función de la factorización de Q. No estudiaremos todos los casos, pero sí los suficientes como para dar una idea de la estrategia general.

Una reducción previa es que si en P/Q el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, llevando a cabo la división con resto de P entre Q, pasaremos al caso en que el grado del numerador es el menor. En una fórmula:

$$\int \frac{P}{Q} = \int c + \int \frac{r}{Q} \qquad \text{si} \quad P = cQ + r.$$

Un ejemplo sencillo es $P = x^2 + x + 3$, $Q = x + 1$, con cociente x y resto 3, en el que la reducción lleva casi inmediatamente a la solución porque Q es de grado uno:

$$\int \frac{x^2 + x + 3}{x + 1}\, dx = \int x\, dx + \int \frac{3}{x + 1}\, dx = \frac{1}{2} x^2 + 3 \log |x + 1| + K.$$

Un ejemplo más complicado es

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

Al dividir $P = x^3$ entre $Q = x^2 - 3x + 2$ se obtiene el cociente $x + 3$ y el resto $7x - 6$. Por tanto,

$$I = \int (x + 3)\, dx + \int \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \frac{1}{2} x^2 + 3x + \int \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2}\, dx.$$

Ahora tenemos que aprender a tratar la última integral.

La estrategia básica es la *descomposición en fracciones simples*. Si el denominador se factoriza como $Q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$ con α_j raíces reales y distintas, entonces cuando el grado del numerador es menor que n, siempre se cumple

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - \alpha_n} \qquad \text{para ciertos } A_1, A_2, \dots, A_n.$$

La manera de hallar los A_j es igualar los numeradores y sustituir $x = \alpha_j$.

En el ejemplo que nos ocupa,

$$\frac{7x-6}{x^2-3x+2} = \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} \quad \Rightarrow 7x-6 = A_1(x-2) + A_2(x-1).$$

Tomando $x = 1$, $A_1 = -1$ y tomando $x = 2$ se sigue $A_2 = 8$. Las integrales resultantes son inmediatas y obtenemos en total

$$I = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \int \Big(\frac{-1}{x-1} + \frac{8}{x-2}\Big)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \log|x-1| + 8\log|x-2| + K.$$

Si el grado de P es menor que el de Q, obviamente nos saltamos el proceso de reducción. Por ejemplo, para calcular $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$ pasamos directamente a la descomposición en fracciones simples

$$\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} \quad \Rightarrow \quad 2x+1 = A_1(x+1) + A_2x.$$

Tomando $x = 0$ y $x = -1$ se deduce $A_1 = A_2 = 1$ y, por tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \int \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\Big)\,dx = \log|x| + \log|x+1| + K.$$

Si hay una o varias raíces múltiples (repetidas), se procede de la misma forma salvo que las fracciones simples correspondientes a una raíz α_j de multiplicidad m son

$$\frac{A_{j,1}}{x-\alpha_j} + \frac{A_{j,2}}{(x-\alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{j,m}}{(x-\alpha_j)^m}$$

Veámoslo sobre un ejemplo. El polinomio $Q = x^3 + x^2$ factoriza como $x^2(x+1)$ donde x, que corresponde a la raíz $\alpha = 0$, aparece con multiplicidad 2. Si P es el numerador, entonces buscamos una descomposición

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{1,2}}{x^2} + \frac{A_2}{x+1}.$$

Al igualar los numeradores, reduciendo a común denominador,

$$x^2 + 3x + 1 = A_{1,1}x(x+1) + A_{1,2}(x+1) + A_2x^2.$$

Dando los valores $x = 0$ y $x = -1$ solo conseguimos determinar dos de los coeficientes. Para el tercero, debemos comparar coeficientes o asignar otro valor que imponga una nueva condición:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; A_{1,2} = 1, \quad x = -1 \;\Rightarrow\; A_2 = -1, \quad x = 1 \;\Rightarrow\; 5 = 2A_{1,1} + 2A_{1,2} + A_2 \;\Rightarrow\; A_{1,1} = 2.$$

Con ello, ya podemos calcular la integral de la función racional correspondiente

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2}\,dx = \int \Big(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx = 2\log|x| - x^{-1} - \log|x+1| + K.$$

El último caso que discutiremos es el de raíces complejas. Para mayor simplicidad, solo nos ocuparemos de la situación en que el factor que produce las raíces complejas es x^2+1. El resto se reducen a este completando cuadrados. Asociado a este factor se añade a la descomposición en fracciones simples un términos de la forma $(Mx+N)/(x^2+1)$. Este da lugar a integrales inmediatas porque

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+1}\,dx = M\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + N\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}M\log(x^2+1) + N\arctan x + K.$$

Por ejemplo, si queremos integrar $(2x^2+x+1)/(x^3+x)$ la factorización del denominador $x(x^2+1)$ conduce a la descomposición

$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+x} = \frac{A_1}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x^2+x+1 = A_1(x^2+1) + (Mx+N)x.$$

Ahora solo tenemos una raíz que sustituir, con $x=0$ se sigue $A_1=1$. Comparando coeficientes o dando otros valores, obtendremos condiciones que determinan M y N. Por ejemplo, una vez que sabemos $A_1=1$, mirando al coeficiente de x^2 se obtiene $2=1+M$, esto es, $M=1$ y haciendo lo mismo con los términos independientes, $N=1$. Entonces,

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}\,dx = \int \Big(\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}\Big)\,dx = \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x + K.$$

En realidad, el caso general de raíces complejas se podría hacer igual que el caso de raíces reales, pero nos llevaría a ciertas discusiones acerca de la definición de la función logaritmo sobre $\mathbb{C}$.

2.3. Integración por cambio de variable

En realidad lo único que refleja esta técnica es lo que ya sabíamos de las integrales inmediatas relativo a la regla de la cadena, pero de una manera más sistemática con la que es más difícil perderse.

Reinterpretamos la regla de la cadena en forma integral escribiendo $t=g(x)$ y, consecuentemente, $dt=g'(x)\,dx$. Esto es,

$$\int f'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f'(t)\,dt = f(t)+K = f\big(g(x)\big)+K.$$

No hay que olvidar el último paso, que consiste en deshacer el cambio. Para integrales definidas no es necesario pasar por la integral indefinida y deshacer el cambio, se puede actuar directamente sobre los límites de integración. La filosofía es clara: cada integral debe tener los límites que corresponden a su variable. En una fórmula,

$$\int_a^b f'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(t)\,dt = f\big(g(b)\big) - f\big(g(a)\big).$$

Es importante notar que los cambios de variable deben ser uno a uno, es decir, no podemos aplicar un cambio de variable $t=x^2$ cuando $x\in[-1,1]$ porque no podremos deshacer el cambio, ya que cada valor no nulo de x corresponderá a dos valores de t. En ese caso habría que descomponer el intervalo en $[-1,0]$ y $[0,1]$ y hacer el cambio en cada uno de ellos.

No hay fórmulas mágicas para saber cuál es el cambio de variable más adecuado. La idea básica a tener en mente es que debes hacer cambios que quiten las cosas que molesten y que no compliquen el diferencial. Por ejemplo, consideremos la integral que da el área bajo la gráfica de $f(x) = \big(1+\sqrt{x}\big)^{-1}$ en $[0,4]$,

$$A = \int_0^4 f = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Si no estuviera la raíz cuadrada sería fácil. Esto motiva el cambio $x = t^2$ con el que tenemos que cambiar dx por $2t\,dt$ resultando

$$A = \int_0^2 \frac{2t}{t+1}\,dt.$$

El cambio en los límites de integración proviene de que $t = \sqrt{x}$ y entonces $x = 0$ y $x = 4$ corresponden, respectivamente a $t = 0$ y a $t = \sqrt{4} = 2$. Esta es la integral de una función racional. Como el grado del numerador y del denominador son iguales, lo primero que debemos hacer es la división con resto $2t = 2(t+1) - 2$ que conduce a

$$A = \int_0^2 \frac{2t}{t+1}\,dt = \int_0^2 \Big(2 + \frac{-2}{t+1}\Big)\,dt = 2t - 2\log|t+1|\Big|_0^2 = 4 - 2\log 3.$$

Calculemos ahora

$$I = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx \qquad \text{mediante } e^x = t.$$

Despejando, $x = \log t$ y por tanto $dx = t^{-1}\,dt$. De esta forma,

$$I = \int \frac{t-1}{(t+1)t}\,dt = \int \Big(\frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{t}\Big)\,dt$$

La descomposición en fracciones simples da $t - 1 = A_1 t + A_2(t+1)$ en los numeradores y con $t = 0$, $t = -1$ se deduce $A_1 = 2$ y $A_2 = -1$. Recordemos deshacer finalmente el cambio, porque nuestra integral inicial era en x,

$$I = \int \Big(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}\Big)\,dt = 2\log|t+1| - \log|t| + K = 2\log(e^x+1) - x + K.$$

Es fácil comprobar que al derivar el resultado se obtiene la función que hemos sometido a integración, en consonancia con el teorema fundamental del cálculo. Por cierto, una forma alternativa muy rara, pero muy rápida, de resolver la integral anterior es convertirla en una integral inmediata multiplicando numerador y denominador por $e^{-x/2}$

$$I = 2\int \frac{1}{e^{x/2}+e^{-x/2}}\Big(\frac{1}{2}e^{x/2}-\frac{1}{2}e^{-x/2}\Big)\,dx = 2\log\big(e^{x/2}+e^{-x/2}\big)+K.$$

Debería estar claro, usando las propiedades del logaritmo, que este resultado coincide con el anterior.

Las funciones trigonométricas se utilizan en algunos cambios para quitar raíces cuadradas de polinomios de segundo grado aprovechando la propiedad $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular el área bajo la gráfica de $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ en el primer cuadrante. Este es el área de un cuarto de círculo unidad, que nos debería salir $\pi/4$. Aunque Arquímedes ya conocía este resultado hace 23 siglos, da lugar a una integral que es todavía demasiado complicada para nosotros. Con el cambio $x=\operatorname{sen} t$ se tiene $dx=\cos t\,dt$ y el área buscada es

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt.$$

A continuación calcularemos esta integral con una fórmula trigonométrica que relaciona el coseno al cuadrado con el coseno.

2.4. Algunas integrales trigonométricas

Solo consideraremos $\int f$ con $f(x)=\operatorname{sen}^m x\cos^n x$. Distinguimos tres posibilidades, las dos primeras no excluyentes:

Si m es impar, escribiendo $\operatorname{sen}^m x$ como $(1-\cos^2 x)^{(m-1)/2}\operatorname{sen} x$, al desarrollar la potencia se obtienen integrales inmediatas. También se puede hacer un cambio $t=\cos x$.

Si n es impar el argumento es similar escribiendo $\cos^n x$ como $(1-\operatorname{sen}^2 x)^{(n-1)/2}\cos x$. También se puede hacer un cambio $t=\operatorname{sen} x$.

Si m y n son pares, se aplican las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

las veces que sean necesarias hasta que aparezcan potencias impares a las que aplicar los casos anteriores.

Por ejemplo, calculemos

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int \cos^2 x\,dx$$

La primera es

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x\big(1-\operatorname{sen}^2 x\big)^{(3-1)/2}\cos x\,dx = \int\big(\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^4 x\big)\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+K.$$

Para la segunda hay que emplear la fórmula de $\cos^2 x$

$$I_2 = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\big(1+\cos(2x)\big)\,dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+K.$$

Estrictamente, no ha sido necesario aplicar el segundo caso con $n=1$ porque la integral de $\cos(2x)$ es inmediata.

Con I_2 podemos terminar el cálculo del área de un cuarto del círculo unidad:

$$A = \int_0^{\pi/2}\cos^2\,dt = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

que es el resultado esperado.

3. Aplicaciones de la integral

Ya sabemos que la integral $\int_a^b f$ para $f \geq 0$ indica el área sobre el eje x y bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Un problema natural consiste en hallar el área entre dos gráficas. La fórmula general es

$$A = \int_a^b |f - g|.$$

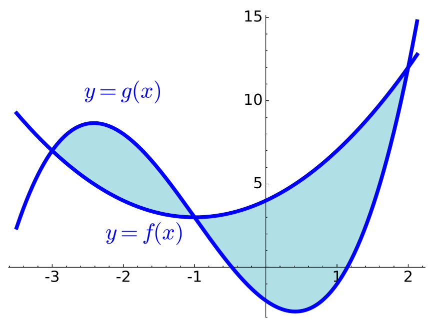
En realidad, esta fórmula no es tan útil porque no sabemos integrar valores absolutos con las técnicas estudiadas. Más bien es un recordatorio de que siempre debemos de integrar la función que está arriba menos la que está abajo.

Por ejemplo, calculemos el área entre las gráficas de $f(x) = x^2 + 2x + 4$ y de $g(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 2$. Para averiguar los intervalos en los que una queda por encima de otra, debemos estudiar dónde coinciden, lo que lleva a resolver $g(x) = f(x)$ o, equivalentemente, a factorizar $g(x) - f(x)$. El resultado obtenido, junto con la representación gráfica, es el siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 4 \\ g(x) &= x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \\ g(x) - f(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \\ &= (x+1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

$g - f$ $\quad - \quad + \quad - \quad +$

-3 -1 2



Es decir, g queda por encima en el intervalo $[-3, -1]$ y por debajo en el $[-1, 2]$. El área encerrada es entonces

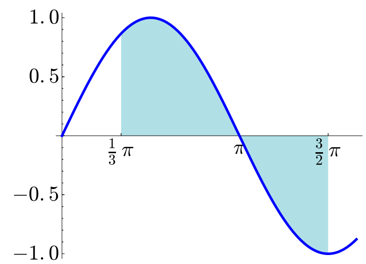
$$A = \int_{-3}^{-1} (g - f) + \int_{-1}^{2} (f - g) = \int_{-3}^{-1} (g - f) - \int_{-1}^{2} (g - f).$$

Sustituyendo $g - f$ e integrando, se tiene

$$A = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6\Big|_{-3}^{-1} - \Big(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6\Big)\Big|_{-1}^{2} = \frac{253}{12}.$$

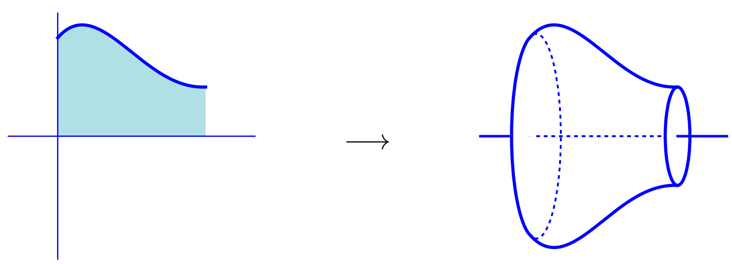
Algo un poco más cercano a la definición de la integral es el cálculo del área limitada por la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el eje x en el intervalo $[\pi/3, 3\pi/2]$. El eje x responde a la ecuación $y = 0$ y el valor absoluto de la fórmula se traduce en que todo lo que tenemos que hacer es poner signos adecuados a la función para obtener resultados positivos. El cálculo y su representación gráfica son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\pi/3}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} (-\operatorname{sen} x) \, dx \\
&= -\cos x \Big|_{\pi/3}^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{3\pi/2} \\
&= \Big(1 + \frac{1}{2}\Big) + (0 + 1) = \frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$



Simplemente cambiamos de signo la parte negativa para la integral corresponda al área.

Cuando la superficie entre una gráfica y el eje x gira alrededor de este eje en cierto intervalo $[a, b]$, se obtiene un sólido de revolución:



El volumen de tal figura geométrica viene dado por

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \, dx.$$

Esta fórmula resulta natural, recordando la definición primera de integral, si notamos que cuando $h > 0$ es muy pequeño, el volumen de la rodaja vertical entre x y $x + h$ es aproximadamente $\pi\big(f(x)\big)^2 h$ ya que el volumen del cilindro es el área de la base (un círculo) por la altura.

Por ejemplo, $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$ da lugar a un cono cuyo volumen es

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{\pi}{3}.$$

Si recuerdas o buscas la fórmula para el volumen del cono, $V = \pi R^2 h$ donde R es el radio de la base y h la altura, verás que el resultado de la integral es coherente con ella porque en nuestro caso $R = h = 1$.

Para hallar el volumen cuando el sólido de revolución se construye haciendo girar la gráfica alrededor del eje y, se utiliza la misma fórmula, pero con la función obtenida al despejar la x en $y = f(x)$. Esto es lógico, pues corresponde a intercambiar los ejes.

Por ejemplo, dada la parábola $f(x) = x^2/4$ en el intervalo $x \in [0, 2]$. La función $f(x)$ varía en $[0, 1]$ y podríamos considerar los volúmenes V_x y V_y de los cuerpos de revolución al girar por los ejes x e y en estos intervalos. Los resultados serían:

$$V_x = \pi \int_0^2 \Big(\frac{1}{4}x^2\Big)^2 dx = \frac{\pi}{16}\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{2\pi}{5} \qquad \text{y} \qquad V_y = \pi \int_0^1 \big(2\sqrt{y}\big)^2 dy = 4\pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 2\pi.$$

Una cosa muy chocante es que regiones infinitas pueden tener área o volumen finitos. Este es el análogo de que una serie (una suma infinita) puede converger a una cantidad finita.

Por ejemplo, el área bajo la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo $[1, \infty)$ viene dada por $\int_1^\infty x^{-2}\,dx = -x^{-1}\big|_1^\infty = 1$ donde se ha usado $1/\infty = 0$. Recordemos que el álgebra del infinito hay que interpretarla en términos de límites. Es decir, lo que estamos afirmando es que el área bajo la gráfica en el intervalo $[1, N]$ se acerca a 1 cuando N crece indefinidamente.

Si cambiamos la función a $f(x) = 1/x$, el área será infinita, pero si consideramos el volumen del sólido obtenido al hacer girar su gráfica alrededor del eje x en el intervalo $[1, \infty)$, el resultado es $V = \pi \int_1^\infty x^{-2}\,dx = \pi$. Lo curioso de este ejemplo es que se puede probar que el área lateral del sólido resultante es infinita y surge la paradoja de que si quisiéramos pintarlo necesitaríamos un área infinita de pintura, pero si lo suponemos hueco y vertemos la pintura en el interior, nos basta con un bote de pintura de capacidad π.

Más allá de ser simples curiosidades matemáticas, las integrales asociadas a regiones infinitas son relativamente comunes en los modelos de la física y la ingeniería, por ello les dedicaremos una sección aparte.

4. Integrales impropias

En diferentes aplicaciones aparecen integrales $\int_a^b f$ en los que $f(a)$ o $f(b)$ no existen o a o b son infinitos. Se dice que la integral es *impropia*. Tales integrales se entienden como límites. Por ejemplo,

$$\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f \quad \text{si } \nexists f(a).$$

El hecho de que en el segundo caso se escriba un límite lateral es solo para no salirnos del intervalo ya que fuera de él f podría no estar definida.

Cuando el límite existe y es finito, se dice que la integral impropia es *convergente* y en caso contrario se dice que es *divergente*.

Por ejemplo, la integral $\int_0^1 \log x\,dx$ es impropia porque $\log 0 = -\infty$. Por tanto, debemos hallar

$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \log x\,dx.$$

Utilizando integración por partes con $u = \log x$ y $dv = 1\,dx$, ya habíamos visto que

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + K.$$

Entonces, la integral impropia es

$$\lim_{t\to 0^+}(x\log x - x)\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+}(-1 - t\log t + t) = -1 - \lim_{t\to 0^+} t\log t = -1 - \lim_{t\to 0^+}\frac{\log t}{1/t}.$$

Con la regla de L'Hôpital, es fácil ver que el último límite es cero, por tanto la integral impropia converge y su valor es -1.

Una integral impropia que no converge es $\int_{-2}^0 x^{-2}\,dx$ porque debemos entenderla como $\lim_{t\to 0^-}\int_{-2}^t x^{-2}\,dx$ y $-x^{-1}\big|_{-2}^t$ tiende a infinito cuando $t\to 0^-$.

Una familia de ejemplos que generalizan los del final de la sección anterior son $I_\alpha = \int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$. Es fácil ver que I_α converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \le 1$.

Al igual que ocurre con las series, es posible estudiar la convergencia de una integral sin necesidad de calcular su valor, esencialmente con una adaptación del criterio de comparación. Solo enunciaremos un resultado para intervalos infinitos. Concretamente, si $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ y $g : [b,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ son funciones bien definidas tales que $\ell = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ cumple $0 < \ell < \infty$ (suponiendo la existencia del límite), entonces $\int_a^\infty f$ y $\int_a^\infty g$ tienen el mismo carácter. Es decir o ambas son convergentes o ambas divergentes.

Por ejemplo,

$$\int_0^\infty \frac{x^2+e^{-x}}{x^3+1}\,dx \quad \text{diverge porque} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Esta última integral es lo que hemos llamado antes I_1.

Variaciones de este criterio permiten tratar integrales impropias en intervalos finitos. Por ejemplo, si se cumple $g \ge f \ge 0$ en $[a,b]$ entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la de $\int_a^b f$ y la divergencia de $\int_a^b f$ implica la de $\int_a^b g$.