Límites y series

Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso: Análisis Matemático I   Profesor: Fernando Chamizo

1. Sucesiones

Intuitivamente, una *sucesión* es una lista indefinidamente larga de números reales o complejos:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \dots$$

Con más rigor, es una regla que asigna a cada $n \in \mathbb{N}$ un número (real o complejo) a_n. En este curso, prácticamente en todos los ejemplos esa regla será una fórmula explícita o una fórmula que dice cómo construir un término a partir del anterior.

Por ejemplo, la fórmula explícita $a_n = n(n^2-1)/6$ da lugar a la sucesión 0, 1, 4, 10, 20, ... y la relación $b_{n+1} = 2 + 1/b_n$ con $b_1 = 2$ a la sucesión 2, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{29}{12}$, $\frac{70}{29}$, ...

Nos gustaría saber la evolución de una sucesión, esto es, cuál es su comportamiento a la larga. Esta cuestión motiva el concepto de *límite*, que es el valor al que se acerca una sucesión. Según la definición rigurosa de límite, $\lim a_n = \ell$ con ℓ un número real o complejo significa que por pequeño que sea un $\epsilon > 0$ que nos inventemos, a partir de un n se cumple $|a_n - \ell| < \epsilon$. Es decir, la distancia entre los términos de la sucesión y ℓ se hace arbitrariamente pequeña. En ese caso se dice que la sucesión es *convergente* y que su límite es ℓ o que tiende a ℓ. Las sucesiones que no tienen límite se dice que son *divergentes*. Otra notación para $\lim a_n = \ell$ es $a_n \to \ell$.

En el primero de los ejemplos anteriores la sucesión no se acerca a nada y entonces no hay límite, a pesar de ello indicaremos mediante $\lim a_n = \infty$ que crece indefinidamente, como se aclara más tarde. En el segundo no está claro qué ocurre. Calculando unos cuantos decimales de los primeros términos se obtiene 2, 2,5, 2,41666, 2,41379, 2,41428, 2,41420, 2,41421 y se atisba la constante 2,4142... En realidad se acerca a $1+\sqrt{2}$ y entonces escribiremos $\lim b_n = 1+\sqrt{2}$. La prueba de ello no es fácil a este nivel. Una posibilidad es notar que la relación $b_{n+1} = 2+1/b_n$ se puede escribir de la forma enrevesada

$$b_{n+1} - (1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{b_n}(1+\sqrt{2}-b_n).$$

Tomando valores absolutos y usando que $(\sqrt{2}-1)/b_n < 1/4$, porque $b_n > 2$, vemos que la distancia de b_n a $1+\sqrt{2}$ se va dividiendo por más de cuatro en cada paso.

Casi todo el rato operaremos con sucesiones de números reales porque los complejos no aportan mucha novedad. En cualquier caso, ∞ no es un número, ni real ni complejo y entonces, paradójicamente, cuando escribimos $\lim a_n = \infty$ (o decimos que a_n tiende a infinito) estamos afirmando que no existe el límite, que la sucesión es divergente. Solo es una notación para indicar que la sucesión crece indefinidamente, lo cual es una forma especial de no tener límite. Reservaremos esta notación para sucesiones reales, aunque sería posible considerar un infinito complejo entendido como $|a_n| \to \infty$. Hay sucesiones, como $a_n = (-1)^n$, que no tienen límite (a_n no se acerca a la larga a un mismo número) y no crecen indefinidamente. En ese caso decimos simplemente que el límite no existe.

Los límites, cuando existen, respetan las operaciones elementales. Por otro lado, el simple hecho de que $\lim n = \infty$ implica que casi todas las sucesiones convergentes que manejaremos estarán construidas mediante operaciones elementales aplicadas a sucesiones que tienden a ∞. Esta situación lleva a una especie de álgebra del infinito que se resume en que para $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$a + \infty = \infty, \qquad a \cdot \infty = \infty, \qquad \frac{a}{\infty} = 0, \qquad \frac{a}{0} = \infty,$$

donde en la última igualdad se exige $a \neq 0$. Estas relaciones deberían estar claras si pensamos en ∞ como algo que crece indefinidamente y 0 como algo que se hace arbitrariamente pequeño. Sin embargo, hay *indeterminaciones*, operaciones cuyo resultado puede variar según el caso:

$$\frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad \infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty.$$

Las tres últimas no son estrictamente operaciones elementales (sumas, restas multiplicaciones y divisiones), pero conviene tenerlas en mente.

Lo que vamos a ver ahora son algunas técnicas habituales para enfrentarse a las indeterminaciones. Casi todo debería ser repaso.

Las tres primeras son, en cierto sentido, equivalentes porque $\frac{0}{0} = \frac{1/\infty}{1/\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ y $0 \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$. Por tanto nos ocuparemos de la primera que es la más común en el caso de sucesiones. La idea es dividir por algo (simplificar, en cierto sentido) para que los infinitos pasen a ser números. Por ejemplo,

$$\lim \frac{2n^3 + 3n - 1}{5n^3 + n^2 + 2} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}} = \frac{2 + 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{2}{5}.$$

La clave es que $2n^3$ domina a los términos del numerador y $5n^3$ a los del denominador.

En esta misma línea

$$\lim \frac{(-3)^n + 4^n}{4^n + 2^n} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim \frac{3^n + (-4)^n}{4^n + 2^n} \quad \text{no existe.}$$

En el primer caso basta dividir por 4^n. Al hacer lo mismo en el segundo caso, nos encontramos algo que va oscilando entre valores próximos a 1 y a -1, lo que contradice la definición de límite.

Resolver la indeterminación $\infty - \infty$ requiere operar de alguna manera para cancelar términos similares. Un ejemplo sencillo es:

$$\lim \Big(n^2 + 2 - \frac{n^4+1}{n^2+3}\Big) = \lim \frac{(n^4+5n^2+6)-(n^4+1)}{n^2+3} = \lim \frac{5n^2+5}{n^2+3} = 5.$$

Ejemplos menos intuitivos son la diferencia de raíces cuadradas. En ese caso, la posible cancelación la obtendremos al multiplicar y dividir por el conjugado (cambiar el signo de en medio):

$$\lim \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \lim \frac{\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big)\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\big)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Las indeterminaciones ∞^0 y 0^0 son equivalentes porque podemos pensar en el segundo caso que el 0 de la base es $1/\infty$. Si escribimos ∞ como $e^{\log\infty}$ llegaremos a un límite del tipo $0 \cdot \infty$. Aquí el logaritmo, como siempre en matemáticas medianamente avanzadas, es neperiano. Por ejemplo,

$$\lim n^{1/n} = e^{\lim \frac{\log n}{n}} = e^0.$$

El cálculo del límite del exponente se basa en que el logaritmo de una cantidad grande es de orden mucho menor que dicha cantidad. Seguramente recuerdas de cursos anteriores cómo calcularlo con la regla de L'Hôpital. En cualquier caso, es algo muy sencillo si tienes en mente que el logaritmo de un número grande intuitivamente es comparable al número de cifras de su parte entera. Concretamente si $n \ge 2$ se tiene que $\log n$ está siempre entre 0,5 y 2,5 veces el número de cifras de n.

Finalmente, la indeterminación 1^∞ se relaciona con el número e a través de la siguiente fórmula, que justificaremos más adelante en el curso,

$$\lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n(a_n-1)} \qquad \text{si} \quad a_n \to 1.$$

Por ejemplo,

$$\lim \Big(\frac{n^2+3n+1}{n^2+7}\Big)^{n+5} = e^{\lim (n+5)\big(\frac{n^2+3n+1}{n^2+7}-1\big)} = e^{\lim \frac{(n+5)(3n-6)}{n^2+7}} = e^3.$$

Seguramente la única novedad que encontrarás en la técnica del cálculo de límites de sucesiones es el siguiente resultado llamado *teorema de Stolz*:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \qquad \text{si} \quad b_n \to \infty \quad \text{y} \quad b_{n+1}-b_n > 0 \text{ para } n \text{ grande.}$$

Tiene su principal utilidad para límites “raros” en que las sucesiones vienen dadas por sumas. Por ejemplo, con $a_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$ y $b_n = n^2 + 1$ tendremos

$$\lim \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{(n+1)^2 - n^2} = \lim \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} = 0.$$

Un poco más difícil es la variante

$$\lim \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

donde se ha tomado $a_n = n\sqrt{n}$ y $b_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$ en el teorema se Stolz. La dificultad radica en que ahora obtenemos una indeterminación $\infty - \infty$ en el numerador, pero ya sabemos que esto se trata multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\lim \frac{(n+1)^3 - n^3}{\big((n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}\big)\sqrt{n+1}} = \lim \frac{3n^2 + \dots}{(n+1)^2 + n\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{3}{\big(1 + \frac{1}{n}\big) + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{3}{2}$$

donde los puntos suspensivos son términos de grado menor que 2.

Aunque suene raro, es posible saber que algunas sucesiones convergen sin calcular su límite. Con un notación que se explica por sí misma, se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *creciente* si $a_{n+1} \ge a_n$ y que es *decreciente* si $a_{n+1} \le a_n$. La única diferencia con el lenguaje usual es que en matemáticas se aplican estos adjetivos también en el caso en que un término es igual al siguiente. Así las sucesiones constantes son las únicas simultáneamente crecientes y decrecientes. También en consonancia bastante fidedigna con el lenguaje usual, se llama *monótona* a cualquier sucesión que sea o bien creciente o bien decreciente.

Un resultado afirma que una sucesión acotada y monótona es siempre convergente. La idea es bien sencilla: si es creciente el límite debe ser el supremo y si es decreciente, el límite debe ser el ínfimo.

Algunas sucesiones definidas mediante una recurrencia dan ejemplos nada triviales de acotación y monotonía. Consideremos la sucesión definida mediante

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \qquad \text{con} \quad a_1 = 1.$$

Los primeros términos, redondeados a tres decimales son 1, 1,414, 1,682, 1,834, 1,915. Veamos primero que está acotada inferiormente por cero y superiormente por 2, esto es, $0 \le a_n \le 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La cota inferior es obvia. Para la superior usamos inducción. Cuando $n = 1$ se tiene $a_1 \le 2$ y suponiendo que para cierto n se cumple $a_n \le 2$ (hipótesis de inducción), obtenemos $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \le \sqrt{2 \cdot 2} = 2$, terminando el proceso de inducción. Ahora veamos que es monótona creciente. Se tiene que

$$a_{n+1} \ge a_n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2a_n} \ge a_n \quad \Leftrightarrow \quad 2a_n \ge a_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \ge a_n.$$

La acotación y la monotonía asegura que la sucesión converge aunque no hayamos hecho ningún intento de calcular su límite.

En realidad si, por alguna razón, sabemos que una sucesión definida mediante una recurrencia $a_{n+1} = f(a_n)$ converge, muchas veces podemos hallar su límite usando que $\lim a_{n+1} = \lim a_n$. La clave es que usualmente f es continua, un concepto que repasaremos más tarde y esto permite meter el límite dentro de la f y establecer la ecuación $\ell = f(\ell)$ donde ℓ es $\lim a_n$, el límite buscado.

En el ejemplo anterior, se deduce $\ell = \sqrt{2\ell}$ lo que, elevando al cuadrado, lleva a $\ell^2 - 2\ell = 0$ que tiene como soluciones $\ell = 0$ y $\ell = 2$. Evidentemente $\ell = 0$ no es válido porque todos los a_n son al menos 1, entonces $\ell = 2$.

En el ejemplo $b_{n+1} = 2 + 1/b_n$ del principio de la sección, se obtendría $\ell = 2 + 1/\ell$ que da lugar a una ecuación de segundo grado con soluciones $\ell = 1 \pm \sqrt{2}$. La única elección posible es $\ell = 1 + \sqrt{2}$ porque la sucesión es obviamente positiva.

Si aplicamos este método a casos no convergentes obtendremos resultados erróneos. Por ejemplo $a_{n+1} = 3a_n - 1$ con $a_1 = 1$ se hace arbitrariamente grande y por tanto no tiene límite, pero el argumento anterior conduce a $\ell = 1/2$. Sin embargo, el mismo ejemplo con $a_1 = 1/2$ da lugar a la sucesión constante $a_n = 1/2$ y el resultado se vuelve correcto.

Aunque nos hemos centrado en las sucesiones de números reales nada impide considerar sucesiones complejas. El infinito complejo se entiende como una sucesión cuyo módulo da lugar a un infinito real. Las técnicas anteriores funcionan de manera similar salvo en lo relativo a las potencias porque el logaritmo de un número complejo no está unívocamente determinado. Por ejemplo, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $e^{(2k+1/2)\pi i} = i$, por tanto todos los valores $(2k + 1/2)\pi i$ son logaritmos de i y al escribir $i^{\sqrt{2}}$ estamos considerando en realidad infinitos números complejos al tiempo: $e^{(2k+1/2)\pi i\sqrt{2}}$. De esta forma, un número complejo elevado a otro a veces no tiene un sentido concreto. A este respecto, recuerda que la raíz n-ésima de un número complejo tiene n posibles resultados distintos.

Un ejemplo de ∞/∞ es:

$$\lim \frac{(3+i)n^2 - in + 3 + 7i}{(1-i)n^2 + 8 + 5i} = \lim \frac{3 + i - \frac{i}{n} + \frac{3+7i}{n^2}}{1 - i + \frac{8+5i}{n^2}} = \frac{3 + i - 0 + 0}{1 - i + 0} = 2 + i.$$

El problema de las potencias de números complejos no se aplica si el exponente es entero. Por ejemplo:

$$\lim \Big(\frac{n^2 - i}{n^2 + i}\Big)^{n^2+1} = e^{\lim (n^2+1)\big(\frac{n^2-i}{n^2+i} - 1\big)} = e^{\lim \frac{-2in^2-2i}{n^2+i}} = e^{-2i} = \cos 2 - i \operatorname{sen} 2.$$

Es instructivo utilizar una calculadora o un paquete matemático que opere con números complejos y comprobar que para n grande se obtienen aproximaciones de este número tan raro.

2. Criterios de convergencia de series

Una *serie* no es más que una sucesión dada por la suma de los primeros n términos de otra sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es decir, corresponde a a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \dots$, las llamadas *sumas parciales*. La notación habitual identifica una serie con la suma de todos los términos y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ocasionalmente el límite inferior en la suma se sustituye por $n = 0$ o por $n = n_0$ cuando se considera una sucesión que no comienza en a_1.

Se dice que la serie *converge* si a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \dots$ se acerca a un límite ℓ. En otro caso, se dice que *diverge*. A diferencia de lo que ocurre con las sucesiones que hemos visto antes, incluso para series sencillas, es difícil hallar el límite ℓ, que identificamos con el valor de la serie. Por ejemplo, las evaluaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} = -\log\Big(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\Big),$$

se escapan del nivel de este curso y causaría una pequeña revolución en matemáticas que alguien encontrara una fórmula sencilla en términos de constantes comunes para $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$.

Dada la dificultad del problema de evaluación del límite, nos contentamos con estudiar si tal límite tiene sentido, es decir, si la serie converge o no. Desde un punto de vista práctico, es de esperar que si la serie converge podamos utilizar un ordenador para aproximar su resultado sumando muchos términos, mientras que si no converge, tal esperanza es vana y hay que revisar el modelo.

Incluso solo el estudio de la convergencia da lugar a problemas muy difíciles, incluso del nivel de investigación, para ciertas series de números complejos o de números reales que involucran números de diferentes signos. Por ello, *en toda esta sección, sin indicarlo cada vez, nos restringiremos a series reales con $a_n \ge 0$ para n suficientemente grande.*

Una familia de series de las que sabemos decidir la convergencia son las *series geométricas*, en las que cada a_n es igual al anterior multiplicado por cierto r. Es decir, $a_n = Cr^n$ con $C > 0$ una constante. Claramente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge para $r \ge 1$ porque las sumas parciales crecen indefinidamente. Por otro lado, en los cursos de bachillerato se obtiene una fórmula para $\sum_{n=1}^{\infty} Cr^n$ válida cuando $r \in (-1, 1)$, concretamente $Cr/(1 - r)$. En particular, la serie converge en este caso. Si nos atenemos a $r \ge 0$ y eliminamos la constante, que es irrelevante, la conclusión es

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \qquad \begin{cases} \text{converge} & \text{si } 0 \le r < 1, \\ \text{diverge} & \text{si } r \ge 1. \end{cases}$$

Para series más complicadas hay ciertos criterios generales. En muchos cursos de análisis, especialmente en los dirigidos a ingenieros, se exagera con la cantidad de criterios que se introducen, cuando desde el punto de vista matemático muchos se pueden sustituir por razonamientos no demasiado complicados. En esta sección solo veremos cuatro criterios.

C1. Condensación. Su alcance es limitado, pero permite decidir la convergencia de cierta familia de series que se utiliza a menudo en combinación con el criterio de comparación.

Si a_n es decreciente a partir de cierto n,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad \textit{converge.}$$

El ejemplo fundamental es $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$. Está claro que la serie diverge para $\alpha \le 0$. En el resto de los casos, $1/n^{\alpha}$ decrece y según el criterio anterior, la convergencia equivale a la de

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{\alpha n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$$

que es una serie geométrica, por tanto convergerá cuando $2^{1-\alpha} < 1$, esto es, para $\alpha > 1$. En resumen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1, \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \le 1. \end{cases}$$

Este es un ejemplo que conviene tener en mente.

Estudiemos ahora la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-1}$. El hecho de comenzar en $n = 2$ se debe a que $\log 1 = 0$ y el sumando correspondiente a $n = 1$ no tendría sentido. Según el criterio de condensación, debemos estudiar

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que diverge según lo que hemos visto antes.

C2. Comparación. Es el criterio más poderoso una vez que conocemos unas pocas series básicas con las que poder comparar. Muchos de los criterios de convergencia de series están en realidad basados en el de comparación aunque sus enunciados no lo sugieran. A menudo, antes de utilizar otros criterios es conveniente simplificar el enunciado aplicando el de comparación.

La idea es extremadamente simple, si para n grande $b_n > Ca_n$ con $C > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace (intuitivamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no llega hasta ∞, tampoco puede hacerlo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$). Recíprocamente, si $b_n < Ca_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

La formulación anterior es lo que se llama a veces *comparación directa*, pero lo habitual es utilizar la *comparación por paso al límite* que es algo muy similar recogido en el siguiente enunciado:

Si a_n y b_n son dos sucesiones y $\ell = \lim a_n/b_n$. Si $0 < \ell < \infty$ (suponiendo la existencia del límite)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{converge.}$$

Además se puede afirmar lo siguiente en los casos extremos:

$$\begin{cases} \textit{Si } \ell = 0, & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge,} \\ \textit{Si } \ell = \infty, & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{diverge.} \end{cases}$$

Para aplicar el criterio, lo que se intenta es encontrar una serie b_n sencilla que capture el comportamiento de a_n. A menudo se busca

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1 \qquad \text{que indicaremos con } a_n \sim b_n$$

y corresponde al caso $\ell = 1$ del criterio.

Por ejemplo,

$$\frac{n^2+1}{n^4+7n} \sim \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+7n} \quad \text{converge porque} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}$$

Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(5^n+1)/(3^n+n^2)$ lo natural es la comparación con $(5/3)^n$ que es una serie geométrica y sabemos que diverge.

Un ejemplo más complicado es $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\big)$. Para decidir con qué comparar empleamos el truco, ya usado en el cálculo de límites, de multiplicar y dividir por el conjugado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\big)\big(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\big)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

Ahora debería estar claro que $a_n \sim 1/(2\sqrt{n}) = \frac{1}{2} n^{-1/2}$. Ya conocemos las series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ y al ser $1/2 < 1$ se tiene que diverge.

Un ejemplo algo enrevesado de comparación directa es $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3)/(2^n-1)$ (que en breve se tratará de forma sencilla con el criterio del cociente). Intuitivamente 2^n "gana" a n^2, que es irrelevante en comparación, por tanto la serie debería converger. Pero no podemos comparar con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ ya que estaríamos en el caso $\lim a_n/b_n = \infty$.

Tomamos artificialmente $b_n = 1/1{,}5^n$, que todavía da una serie convergente y se cumple para n grande $(n^2+3)/(2^n-1) < 1/1{,}5^n$, ya que esto equivale a $n^2+3+(2/3)^n < (4/3)^n$ y a la larga una potencia de base mayor que 1 siempre supera a cualquier potencia de su exponente y $(2/3)^n \to 0$.

Otro ejemplo menos enrevesado pero conceptualmente más difícil es $\sum_{n=1}^\infty p_n^{-2}$ donde p_n indica el n-ésimo primo: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. En principio te puede entrar el pánico porque no tenemos una fórmula explícita para p_n. Sin embargo, si lo piensas un momento, está claro que $p_n > n$ porque no todos los números naturales son primos. De $p_n^{-2} < n^{-2}$ y la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$ se deduce la de $\sum_{n=1}^\infty p_n^{-2}$. Dicho sea de paso, en el siglo XVIII se demostró que $\sum_{n=1}^\infty p_n^{-1}$ no converge, pero eso escapa a las técnicas de este curso.

C3. Criterio del cociente. Es un criterio bastante mecánico especialmente adaptado para casos en los que hay potencias o factoriales.

Suponiendo la existencia del siguiente límite o que es ∞,

$$\ell = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \textit{implica} \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty a_n & \textit{converge si } \ell < 1, \\ \sum_{n=1}^\infty a_n & \textit{diverge si } \ell > 1 \ (\textit{o } \ell = \infty). \end{cases}$$

El caso $\ell = 1$ es dudoso, el criterio no sirve porque unas veces hay convergencia con $\ell = 1$ y otras no. Ejemplos de este caso dudoso son $\sum_{n=1}^\infty 1/n$, $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2$. Ya sabemos que la primera diverge y la segunda converge. En realidad el criterio del cociente es dudoso a no ser que la sucesión crezca o decrezca muy rápido.

Recuperando un ejemplo anterior, se tiene

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2+3}{2^n-1} \quad \text{converge porque} \quad \lim \frac{\frac{(n+1)^2+3}{2^{n+1}-1}}{\frac{n^2+3}{2^n-1}} = \lim \frac{(n+1)^2+3}{n^2+3} \cdot \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

En este y otros ejemplos, merece la pena aplicar comparación primero para no entrar en cálculos innecesariamente complicados. En este caso sería con $\sum_{n=1}^\infty n^2/2^n$ que permite una aplicación más limpia del criterio del cociente. Si el enunciado hubiera sido estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty (n^3-5n+1)/(2^n+3n^2)$, se pasaría a $\sum_{n=1}^\infty n^3/2^n$ por comparación. Para esta última serie de nuevo el criterio del cociente da la convergencia.

Un ejemplo que combina potencias y factoriales es $\sum_{n=1}^\infty n!/n^n$. El límite a calcular es:

$$\lim \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = e^{\lim \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} < 1,$$

por tanto la serie converge. En la segunda igualdad se ha usado $(n+1)!/n! = n+1$. Esta simplificación de los factoriales habría sido imposible si partimos por ejemplo de la simple variante $\sum_{n=1}^\infty (n!+8)/(n^n+9)$. En ese caso es prácticamente obligatorio utilizar el criterio de comparación para pasar a la serie $\sum_{n=1}^\infty n!/n^n$.

C4. Criterio de la raíz. Es el criterio hermano del criterio del cociente. De hecho se puede probar que si los límites de su enunciado existen, dan lo mismo. La diferencia práctica es que está más adaptado a potencias.

Suponiendo la existencia del siguiente límite o que es ∞,

$$\ell = \lim \sqrt[n]{a_n} \quad \textit{implica} \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \textit{converge si } \ell < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \textit{diverge si } \ell > 1 \ (o\ \ell = \infty). \end{cases}$$

De nuevo, el criterio no dice nada en el caso $\ell = 1$.

Su aplicación a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ es algo más compleja que la del criterio del cociente, aunque, por supuesto, con el mismo resultado:

$$\lim \frac{n^{1/n}}{2} = \frac{1}{2} \lim e^{(\log n)/n} = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{la serie converge.}$$

Para practicar, apliquemos el criterio a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n^2+4}{n^2+2} \Big)^{n^3+2023}.$$

En realidad, este es un ejemplo de abuso de los criterios. Está claro que $a_n > 1$, por tanto la serie no puede converger. Es decir, apelando al criterio de comparación o al sentido común, es inmediato. Apliquemos de todos modos el de la raíz:

$$\lim \Big(\frac{n^2+4}{n^2+2} \Big)^{n^2+2023/n} = e^{\lim (n^2+2023/n)\left(\frac{n^2+4}{n^2+2}-1\right)} = e^{\lim \frac{2n^2+4046/n}{n^2+2}} = e^2.$$

Al ser $e^2 > 1$ se tiene que diverge.

En relación con el ejemplo anterior, no es difícil ver que para que los criterios del cociente y de la raíz den divergencia se debe tener $\lim a_n = \infty$, lo cual permite que a menudo por inspección directa sea obvio $a_n > 1$ para n grande y, con ello, también sea obvia la divergencia.

3. Convergencia absoluta y condicional

Ahora abordaremos sin profundizar la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para las que no se tiene a la larga $a_n \ge 0$. Está claro que si para n grande se tuviera $a_n \le 0$ entonces usando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ se podrían aplicar los criterios anteriores. El problema está en el resto de los casos y puede ser muy difícil estudiar la convergencia de una series cuando se permiten signos o números complejos. Pensemos por ejemplo en $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cos n$. Ya hemos mencionado que se sabe incluso evaluar. Sin embargo nuestros conocimientos no alcanzan para obtener la convergencia. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ diverge, pero $\cos n$ introduce unos signos que podrían dar lugar a una cancelación que llevase a la convergencia, como de hecho ocurre. La naturaleza de tal cancelación, a nuestro nivel, es misteriosa porque el patrón de signos de $\cos n$ parece tener cierta regularidad ternaria que esporádicamente se rompe:

$$+,\ -\ -\ -+,\ +,\ +,\ -\ -\ -+,\ +,\ +,\ +,\ -\ -\ -+,\ +,\ +,\ -\ -\ -+,\ +,\ +,\dots$$

lo cual está relacionado con que $\pi \approx 3$. Para series de números complejos el problema se agrava porque hay infinitas direcciones posibles, algo así como infinitos signos.

En este curso nos limitaremos a hacer unas observaciones generales y a ver un solo criterio.

La primera observación es muy elemental:

$$\lim |a_n| \neq 0 \quad \textit{o no existe} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{diverge.}$$

La razón es simple: si añadimos términos que no tienden a cero las sumas parciales no se pueden acercar a un número concreto.

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(1+(-1)^n\big)n^2 - 7n}{n^2+8n+1} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)n^2 - 7n}{(3+i)n^2 + i} \qquad \text{divergen.}$$

En el primer caso, $|a_n|$ no tiene límite porque para n grande alterna entre valores muy próximos a 2 y a 0. En el segundo caso $|a_n|$ tiende a $|(2+i)/(3+i)|$ que, independientemente de su valor numérico, está claro que no es cero.

Otro ejemplo es una variante de una serie tratada antes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n^2+4}{n^2+2}\Big)^{n^2+2023}.$$

Con un cálculo muy similar al ya hecho, se tiene que $\lim a_n = e^2$ y por tanto la serie diverge. También es el caso reemplazando n^2+2023 por $n+2023$ porque $\lim a_n = 1$.

La segunda observación es ligeramente más profunda. Es algo así como la mitad del criterio de comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \textit{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge.}$$

Intuitivamente, si una serie converge sin signos converge, al incorporar la cancelación inducida por los signos o por las diferentes direcciones de los números complejos las sumas parciales no se pueden desbocar. Cuando se cumple la hipótesis de esta observación, es decir, cuando

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente*. La convergencia absoluta es, por tanto, más que la convergencia, es la convergencia incluso sin signos.

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+4i)^n}$$

convergen y lo hacen absolutamente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} |\cos n|/n^2$ converge, por comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|3+4i|^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/5^n$ converge porque es una serie geométrica con $r<1$. Supongamos que este último ejemplo lo modificamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+4i)^n+n-2} \quad \text{que lleva a considerar} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big|(3+4i)^n+n-2\big|}.$$

La convergencia de esta última serie, y por tanto de la original, se deduciría por comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|3+4i|^n$. Nótese que no es una versión nueva de comparación, pues una vez que hemos tomado los módulos las series son reales y de términos positivos.

Las series convergentes que no son absolutamente convergentes, es decir, a las que no se aplica la observación anterior, se dice que son *condicionalmente convergentes*. La terminología se basa en que son convergentes *a condición* de que dejes los signos como están. El único caso que se estudia en este curso es el de signos alternos, cubierto por el *criterio de Leibniz*:

Si $a_{n+1} \le a_n$ para n suficientemente grande y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n}$ converge, gracias a este criterio, y lo hace condicionalmente porque sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ diverge.

Un ejemplo más complicado es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

El hecho de que aparezca $(-1)^{n+1}$ o $(-1)^n$ es irrelevante a la hora de aplicar el criterio de Leibniz pues siempre podemos sacar un signo fuera de la suma. Lo importante es comprobar las hipótesis:

$$a_{n+1} \le a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \le \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \big((n+2)n\big)^{n+1} \le (n+1)^{2n+2}.$$

Extrayendo la raíz $(n+1)$-ésima se obtiene $(n+2)n \le (n+1)^2$ que es cierto operando. Por otro lado, $a_n \to 0$ ya que, sin entrar en detalles, sabemos que $(n+1)^n/n^n \to e$ y $1/n \to 0$. En definitiva, la serie converge.