1) Estudia si las siguientes funciones son derivables en $x=0$ definiendo $f_j(0)=0$.

$$f_1(x)=x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x},\qquad f_2(x)=3^{-1/|x|},\qquad f_3(x)=\frac{x\operatorname{sen}x}{|x|}.$$

2) Estudia si $f(x)=x|x|\operatorname{sen}x$ tiene una derivada segunda.

3) Calcula la derivada de $\log\frac{x^2+1}{x^4+1}$ y de $x^{\tan x}$.

4) Halla la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen}\left(\pi x^{2x}\right)$ en $x=1$.

5) Sea $g(x)$ tal que $(s\circ g)(x)=2x$ con $s(x)=e^x-e^{-x}$. Halla la derivada de g consiguiendo una expresión lo más explícita posible. Indicación: Piensa en la diferencia $(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2$.

6) Calcula la derivada de $\arctan g(x)$ y de $\operatorname{arc\,sen} g(x)$ donde $g(x)=\sqrt{x^2-1}$.

7) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^x+3^x-5}{x^2+x-2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)^3}{2x^5+2x^4-x^3},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\operatorname{sen}x}{\big(\log(1+x)\big)^2}.$$

8) Considera los límites

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x},\qquad L_2=\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\frac{1}{x},\qquad L_3=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}x}.$$

Se tiene $L_1=1$ y $L_2=0$ (explica por qué) y por tanto $L_3=L_1L_2=0$. Sin embargo, al aplicar directamente la regla de L'Hôpital a L_3 se obtiene un límite que no existe. ¿Sabrías resolver esta paradoja? Indicación: Revisa el enunciado preciso de la regla de L'Hôpital.

9) Para la función $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos y esboza su gráfica.

10) Demuestra que $x^3-3x+C=0$, donde C es una constante, tiene a lo más una solución $x\in[-1,1]$. Halla los valores de C para los que hay una solución y los valores para los que no hay ninguna.

11) Esboza la gráfica de $f(x)=|x^2+2x-3|+|x+2|$.

12) Decide cuándo es cóncava y convexa la gráfica de la función $f(x)=x^2+4\cos x$.

13) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x)=\exp\left((x^2-1)^{-1}\right)$.

14) Demuestra la desigualdad $e^x\geq 1+x$ para $x\in\mathbb{R}$ y $x^{-1}\log x\leq e^{-1}$ para $x>0$. En cada caso halla un valor de x para el que se tenga la igualdad.

15) Halla el volumen máximo que puede tener un cono (circular recto) inscrito en una esfera de radio 3. Indicación: Recuerda que el volumen del cono es un tercio del área de la base por la altura.

16) Halla la mínima distancia del punto $(3, 3/2)$ a la parábola $y = 2x^2$.

17) Considera un triángulo equilátero de lado 2 y un rectángulo en su interior de manera que uno de sus lados esté dentro de uno de las lados del triángulo. ¿Cuál es el área máxima del rectángulo?

18) Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 de $f(x) = \cos x$ en $x_0 = \pi/4$.

19) Calcula los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 de $f(x) = x^3 + x + 1$ en $x_0 = 1$. ¿Qué ocurre si operas el polinomio de grado 3? Da una explicación para ello.

20) Se sabe que la función $f(x) = 4\arctan(3x) + 4\arctan(2x)$ cumple $f(1/6) = \pi$. Halla el polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ de menor grado con el que se obtenga una aproximación de π con un error menor que 0.025.