Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Dadas las funciones $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 6x + 3$, halla el área limitada entre sus gráficas.

Ambas funciones representan parábolas, la primera con las ramas hacia abajo (por el signo negativo de x^2) y la segunda con las ramas hacia arriba. Estudiemos dónde se cortan:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ 2.$$

Por la mencionada interpretación geométrica, la primera gráfica debe quedar por encima en el intervalo $[0,2]$. Así pues, el área buscada es

$$A = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_0^2 \big(-3x^2 + 6x\big)\,dx = \left(-x^3 + 3x^2\right)\Big|_0^2 = -8 + 12 = 4.$$

2) [3.5 puntos] Considera la función $f(x) = 5(3x+1)\operatorname{sen}\dfrac{x}{3} - 2\log\dfrac{3-x}{3+x}$. Calcula $T_2(f,0)$, esto es, su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

Usando las propiedades de los logaritmos, se tiene $f(x) = 5f_1(x) - 2f_2(x)$ con

$$f_1(x) = (3x+1)\operatorname{sen}\frac{x}{3} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \log(3-x) - \log(3+x).$$

La derivada de f_1 es $f_1'(x) = 3\operatorname{sen}\frac{x}{3} + \frac{1}{3}(3x+1)\cos\frac{x}{3}$, utilizando la fórmula para derivar productos. Además, $f_2'(x) = -(3-x)^{-1} - (3+x)^{-1} = (x-3)^{-1} - (x+3)^{-1}$. Con ello,

$$f'(0) = 5f_1'(0) - 2f_2'(0) = 5\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{2}{3} = 3.$$

Derivando una vez más, $f_1''(x) = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} - \frac{1}{9}(3x+1)\operatorname{sen}\frac{x}{3}$ y $f_2''(x) = -(x-3)^{-2} + (x+3)^{-2}$. Así pues,

$$f''(0) = 5f_1''(0) - 2f_2''(0) = 5\cdot 2 - 2\cdot 0 = 5\cdot 2.$$

Completando estos cálculos con $f(0) = 0$, se obtiene finalmente,

$$T_2(f,0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 3x + 5x^2.$$

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ Se cumple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^2}\int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt = 1.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt}{x^2/\log x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x/\log x}{(2x\log x - x)/(\log x)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{2\log x - 1} = \frac{1}{2}.$$

V. ☐ F. ■ La función definida por $f(x) = x^2\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es discontinua (no continua) en el origen.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0$ (L'Hôpital en el primer límite y seno acotado entre -1 y 1 en el segundo). Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y la función es continua.

Apellidos y nombre: ....
.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Considera la función $f(x) = 7(3x+1)\operatorname{sen}\dfrac{x}{3} - 4\log\dfrac{3-x}{3+x}$. Calcula $T_2(f,0)$, esto es, su polinomio de Taylor de orden 2 en $a=0$.

Usando las propiedades de los logaritmos, se tiene $f(x) = 7f_1(x) - 4f_2(x)$ con

$$f_1(x) = (3x+1)\operatorname{sen}\frac{x}{3} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \log(3-x) - \log(3+x).$$

La derivada de f_1 es $f_1'(x) = 3\operatorname{sen}\frac{x}{3} + \frac{1}{3}(3x+1)\cos\frac{x}{3}$, utilizando la fórmula para derivar productos. Además, $f_2'(x) = -(3-x)^{-1} - (3+x)^{-1} = (x-3)^{-1} - (x+3)^{-1}$. Con ello,

$$f'(0) = 7f_1'(0) - 4f_2'(0) = 7\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} = 5.$$

Derivando una vez más, $f_1''(x) = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} - \frac{1}{9}(3x+1)\operatorname{sen}\frac{x}{3}$ y $f_2''(x) = -(x-3)^{-2} + (x+3)^{-2}$. Así pues,

$$f''(0) = 7f_1''(0) - 4f_2''(0) = 7\cdot 2 - 4\cdot 0 = 7\cdot 2.$$

Completando estos cálculos con $f(0)=0$, se obtiene finalmente,

$$T_2(f,0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 5x + 7x^2.$$

2) [3.5 puntos] Dadas las funciones $f(x) = 5 - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 6x + 5$, halla el área limitada entre sus gráficas.

Ambas funciones representan parábolas, la primera con las ramas hacia abajo (por el signo negativo de x^2) y la segunda con las ramas hacia arriba. Estudiemos dónde se cortan:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\, 2.$$

Por la mencionada interpretación geométrica, la primera gráfica debe quedar por encima en el intervalo $[0, 2]$. Así pues, el área buscada es

$$A = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_0^2 \big(-3x^2 + 6x\big)\,dx = \left(-x^3 + 3x^2\right)\Big|_0^2 = -8 + 12 = 4.$$

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. □ F. ■ Se cumple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2} \int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt = 1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt}{x^2/\log x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x/\log x}{(2x\log x - x)/(\log x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{2\log x - 1} = \frac{1}{2}.$$

V. □ F. ■ La función definida por $f(x) = x^2 \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es discontinua (no continua) en el origen.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$ (L'Hôpital en el primer límite y seno acotado entre -1 y 1 en el segundo). Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y la función es continua.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Dadas las funciones $f(x) = 7 - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 6x + 7$, halla el área limitada entre sus gráficas.

Ambas funciones representan parábolas, la primera con las ramas hacia abajo (por el signo negativo de x^2) y la segunda con las ramas hacia arriba. Estudiemos dónde se cortan:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\, 2.$$

Por la mencionada interpretación geométrica, la primera gráfica debe quedar por encima en el intervalo $[0, 2]$. Así pues, el área buscada es

$$A = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_0^2 \big(-3x^2 + 6x\big)\, dx = \big(-x^3 + 3x^2\big)\Big|_0^2 = -8 + 12 = 4.$$

2) [3.5 puntos] Considera la función $f(x) = 8(3x+1)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{x}{3} - 5\log\dfrac{3-x}{3+x}$. Calcula $T_2(f,0)$, esto es, su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

Usando las propiedades de los logaritmos, se tiene $f(x) = 8f_1(x) - 5f_2(x)$ con

$$f_1(x) = (3x+1)\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{3} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \log(3-x) - \log(3+x).$$

La derivada de f_1 es $f_1'(x) = 3\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{3} + \frac{1}{3}(3x+1)\cos\frac{x}{3}$, utilizando la fórmula para derivar productos. Además, $f_2'(x) = -(3-x)^{-1} - (3+x)^{-1} = (x-3)^{-1} - (x+3)^{-1}$. Con ello,

$$f'(0) = 8f_1'(0) - 5f_2'(0) = 8\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{2}{3} = 6.$$

Derivando una vez más, $f_1''(x) = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} - \frac{1}{9}(3x+1)\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{3}$ y $f_2''(x) = -(x-3)^{-2} + (x+3)^{-2}$. Así pues,

$$f''(0) = 8f_1''(0) - 5f_2''(0) = 8\cdot 2 - 5\cdot 0 = 8\cdot 2.$$

Completando estos cálculos con $f(0) = 0$, se obtiene finalmente,

$$T_2(f,0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 6x + 8x^2.$$

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ Se cumple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^2}\int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt = 1.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt}{x^2/\log x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x/\log x}{(2x\log x - x)/(\log x)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{2\log x - 1} = \frac{1}{2}.$$

V. ☐ F. ■ La función definida por $f(x) = x^2\dfrac{\mathrm{sen}(1/x)}{\mathrm{sen}\,x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es discontinua (no continua) en el origen.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{sen}\,x}\cdot\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0$ (L'Hôpital en el primer límite y seno acotado entre -1 y 1 en el segundo). Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y la función es continua.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Considera la función $f(x) = 10(3x+1)\operatorname{sen}\dfrac{x}{3} - 7\log\dfrac{3-x}{3+x}$. Calcula $T_2(f,0)$, esto es, su polinomio de Taylor de orden 2 en $a=0$.

Usando las propiedades de los logaritmos, se tiene $f(x) = 10f_1(x) - 7f_2(x)$ con

$$f_1(x) = (3x+1)\operatorname{sen}\frac{x}{3} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \log(3-x) - \log(3+x).$$

La derivada de f_1 es $f_1'(x) = 3\operatorname{sen}\frac{x}{3} + \frac{1}{3}(3x+1)\cos\frac{x}{3}$, utilizando la fórmula para derivar productos. Además, $f_2'(x) = -(3-x)^{-1} - (3+x)^{-1} = (x-3)^{-1} - (x+3)^{-1}$. Con ello,

$$f'(0) = 10f_1'(0) - 7f_2'(0) = 10\cdot\frac{1}{3} + 7\cdot\frac{2}{3} = 8.$$

Derivando una vez más, $f_1''(x) = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} - \frac{1}{9}(3x+1)\operatorname{sen}\frac{x}{3}$ y $f_2''(x) = -(x-3)^{-2} + (x+3)^{-2}$. Así pues,

$$f''(0) = 10f_1''(0) - 7f_2''(0) = 10\cdot 2 - 7\cdot 0 = 10\cdot 2.$$

Completando estos cálculos con $f(0)=0$, se obtiene finalmente,

$$T_2(f,0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 8x + 10x^2.$$

2) [3.5 puntos] Dadas las funciones $f(x) = 9 - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 6x + 9$, halla el área limitada entre sus gráficas.

Ambas funciones representan parábolas, la primera con las ramas hacia abajo (por el signo negativo de x^2) y la segunda con las ramas hacia arriba. Estudiemos dónde se cortan:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ 2.$$

Por la mencionada interpretación geométrica, la primera gráfica debe quedar por encima en el intervalo $[0,2]$. Así pues, el área buscada es

$$A = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_0^2 \big(-3x^2 + 6x\big)\,dx = \big(-x^3 + 3x^2\big)\Big|_0^2 = -8 + 12 = 4.$$

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ Se cumple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2} \int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt = 1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_5^x \frac{t}{\log t}\,dt}{x^2/\log x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x/\log x}{(2x\log x - x)/(\log x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{2\log x - 1} = \frac{1}{2}.$$

V. ☐ F. ■ La función definida por $f(x) = x^2 \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es discontinua (no continua) en el origen.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$ (L'Hôpital en el primer límite y seno acotado entre -1 y 1 en el segundo). Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y la función es continua.
