Variable Compleja I **(CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Apuntes 8 a): propina

Cálculo de la transformada de Fourier mediante las técnicas complejas. En algunas asignaturas optativas como Variable Real o Probabilidad II suele verse el concepto de transformada de Fourier. Recordemos la definición.

Definición. Sea $u: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función absolutamente integrable en la recta real:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|\, dt < +\infty.$$

La *transformada de Fourier* de u se define como la función

$$\widehat{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-ixt}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Observación. En algunos textos la integral (o el exponente) se multiplica por una constante, relacionada con 2π, que permite que la transformada tenga ciertas propiedades adicionales; no obstante, esa modificación no es esencial para la presente discusión.

La transformada de Fourier tiene diversas propiedades interesantes y muchas aplicaciones en Análisis de Fourier, Análisis Armónico, Probabilidad, Ecuaciones Diferenciales y Teoría de Operadores, entre otros campos. No obstante, calcular explícitamente la transformada de Fourier de una función concreta suele ser una tarea no trivial en muchos casos y requiere un buen manejo de técnicas de integración. Presentamos aquí el cálculo de la transformada de Fourier de una función racional suave y absolutamente integrable utilizando los métodos estudiados en estos apuntes.

Ejercicio 1. *Calcule la transformada de Fourier, $\widehat{u}(x)$, de la función $u(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.*

SOLUCIÓN. Hemos de calcular la integral

$$\widehat{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{1+t^2}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

El caso $x = 0$ es elemental:

$$\widehat{u}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi \ .$$

Calculemos ahora $\widehat{u}(x)$ para un valor $x < 0$, integrando la función analítica de z, dada por

$$f(z) = \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}$$

sobre el contorno $\gamma_R = C_R + I_R$ ya considerado en varios ejemplos anteriores. Al igual que en esos ejemplos, puede verse que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0\,.$$

A saber, escribiendo $z = a + ib$, $b \ge 0$ ($z \in C_R$), obtenemos

$$|f(z)| = \frac{\left|e^{-ixz}\right|}{|1+z^2|} = \frac{\left|e^{-ixa}e^{xb}\right|}{|1+z^2|} = \frac{e^{xb}}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|z^2|-1} = \frac{1}{R^2-1}\,,$$

utilizando primero las hipótesis $x < 0$, $b \ge 0$ y luego la desigualdad triangular: $|1+z^2| \ge |z^2| - 1$. Luego, por las estimaciones ya habituales, vemos que

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le \frac{1}{R^2-1}\,\ell(C_R) = \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,.$$

Puesto que f sólo tiene un polo simple, $z = i$, dentro de γ_R ($R > 1$), el teorema de los residuos (o la fórmula de Cauchy) implica que

$$\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(t)\,dt = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f; i) = 2\pi i\,\frac{e^{-ix\cdot i}}{i+i} = \pi e^x\,.$$

Dejando que $R \to +\infty$, obtenemos $\widehat{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \pi e^x$, para $x < 0$.

Integrando sobre el contorno simétrico respecto al eje real, compuesto por el mismo intervalo I_R y por la otra semi-circunferencia de radio R desde R hasta $-R$, pero ubicada en el semiplano inferior, con el polo de f en $-i$ esta vez, obtenemos $\widehat{u}(x) = \pi e^{-x}$, para $x > 0$. Resumiendo los tres casos en una fórmula, ahora podemos escribir:

$$\widehat{u}(x) = \pi e^{-|x|}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

obteniendo la fórmula que se puede encontrar en diversos textos, a veces sin justificación, y que ahora queda demostrada.

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20