Variable Compleja I (CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Teorema de los residuos y sus aplicaciones

En esta entrega continuamos con la teoría desarrollada en los apuntes anteriores y formulamos el Teorema de los residuos. Dicho resultado tiene numerosas aplicaciones en Análisis en general. Por un lado, están las aplicaciones cuantitativas al cálculo de integrales, de las que veremos varios ejemplos en este entrega de apuntes. Por otro lado, existen también aplicaciones cualitativas muy importantes, que nos permiten deducir los resultados básicos de la llamada Teoría geométrica de funciones, como el principio del argumento, teorema de Rouché, teorema de la aplicación abierta o el principio del módulo máximo. Las veremos en la siguiente entrega de apuntes.

En este entrega, destacaremos algunas de las numerosas aplicaciones del Teorema de los residuos al cálculo de integrales de funciones complejas y reales. Debido a la falta de tiempo, nuestra selección será muy limitada e incluso el último ejercicio resuelto se puede omitir en una primera lectura.

Teorema de los residuos. Algunas aplicaciones directas

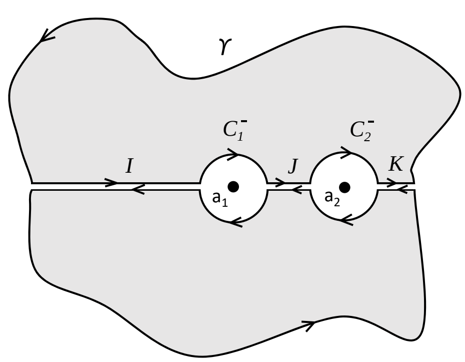
Teorema de los residuos. ¿Cómo integrar a lo largo de un contorno una función con varias singularidades aisladas dentro de dicho contorno? La respuesta viene dada por el siguiente resultado fundamental.

Teorema 1 *(Teorema de los residuos). Sea Ω un dominio y γ un contorno contenido en Ω, junto con su dominio interior, $D_{\text{int}}(\gamma)$. Sea f una función analítica en Ω, salvo en las singularidades aisladas $a_1, a_2, \dots, a_n$, todas ellas contenidas en $D_{\text{int}}(\gamma)$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; a_k)\,.$$

Observación. La fórmula integral de Cauchy constituye el caso especial $n = 1$ de este teorema (un polo simple), mientras que la fórmula de Cauchy generalizada para la derivada de orden n corresponde al caso de un polo de orden mayor que uno.

DEMOSTRACIÓN. Basta rodear cada singularidad a_k mediante una circunferencia C_k de radio pequeño (para que los discos cerrados correspondientes estén contenidos en Ω y sean disjuntos). Ilustramos la prueba en el dibujo para el caso de dos singularidades.



La demostración sigue exactamente la misma idea que una proposición de los apuntes sobre el teorema de Cauchy, con un contorno γ dentro de otro, Γ. También divideremos el dominio entre ambas curvas en dos dominios, esta vez usando $n+1$ segmentos (que, en el caso $n=2$ representado en el dibujo, son tres: I, J y K), obteniendo dos contornos, uno superior y otro inferior. La integral a lo largo de cada uno de los contornos es cero y, debido a las cancelaciones de las integrales en direcciones opuestas (la integral sobre I y sobre I^-, etc.), resulta que

$$\int_\gamma f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k^-} f(z)\,dz = 0$$

y, por tanto,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f;a_k)\,. \qquad \blacksquare$$

Cálculo de ciertas integrales complejas usando el Teorema de los residuos. Veremos primero unos ejemplos de aplicación directa del Teorema 1.

Ejercicio 1. *Siendo $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva, calcule $\int_{\mathbb{T}} e^{3/z}\,dz$.*

Solución. Obviamente, $z=0$ es la única singularidad aislada de $f(z)=e^{3/z}$ en el plano. Ya sabemos de un ejemplo de la entrega anterior que $\operatorname{Res}(e^{3/z};0)=3$. Por el Teorema de los residuos, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} e^{3/z}\,dz = 6\pi i\,. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 2. *Evalúe la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{2\,dz}{4z^2-1}\,,$$

donde γ es la circunferencia unidad: $\gamma=\{z:\ |z|=1\}$, dotada de la orientación positiva.

Solución. El problema se puede resolver de distintas maneras. En una entrega anterior ya vimos una, usando fracciones simples para poder aplicar la Fórmula integral de Cauchy. He aquí otra solución, vía el teorema de los residuos. La función

$$f(z) = \frac{2}{4z^2-1} = \frac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

evidentemente tiene dos polos simples en el plano complejo: $a_1=\frac{1}{2}$ y $a_2=-\frac{1}{2}$, ambos dentro de la curva γ, que es simple, cerrada y C^1. Por tanto, aunque la fórmula integral de Cauchy no sea aplicable directamente, el *Teorema de los residuos* sí lo es:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f;a_1)+\operatorname{Res}(f;a_2)\right).$$

Para evaluar esos residuos, utilizamos la fórmula habitual para el residuo en un polo simple:

$$\operatorname{Res}(f;a_1) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right) f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,.$$

De manera análoga, $\operatorname{Res}(f;a_2)=-\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1}dz = \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 3. *(a) Determine las singularidades aisladas de la función* $f(z) = \dfrac{e^z}{\cos z - 1}$ *situadas dentro de la circunferencia* $\gamma = \{z: \ |z-6| = 1\}$.

(b) Después calcule la integral $I = \int_\gamma f(z)\,dz$.

SOLUCIÓN. (a) Las únicas singularidades de f son polos y son exactamente los puntos en los que $\cos z = 1$. Se trata de los puntos $z_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; es fácil encontrarlos aplicando las técnicas conocidas de los ejercios de temas anteriores. En efecto, la ecuación $\cos z = 1$ significa que $e^{iz} + e^{-iz} = 2$, es decir, $e^{2iz} + 1 = 2e^{iz}$. La sustitución $w = e^{iz}$ nos da la ecuación cuadrática $w^2 + 1 = 2w$ cuya única solución es $w = 1$, es decir: $e^{iz} = 1$ y eso nos lleva a la conclusión deseada como en varios ejercicios vistos con anterioridad.

De todos estos puntos z_n, $n \in \mathbb{Z}$, sólo $z_1 = 2\pi$ está dentro de la circunferencia γ. En efecto, $|2\pi - 6| < 1$. Para $n \geq 2$, es inmediato que $|2\pi n - 6| = 2\pi n - 6 \geq 4\pi - 6 > 1$, mientras que para $n \leq 0$, $n = -m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego $|2\pi n - 6| = |-2\pi m - 6| = 2\pi m + 6 \geq 6 > 1$. Por tanto, el único polo a tener en cuenta es $z_1 = 2\pi$.

(b) No sería fácil trabajar con la serie de Laurent alrededor de $z = 2\pi$ ya que el denominador no es un polinomio, así que calculamos el residuo de forma directa.

En primer lugar, comprobamos el orden de este polo. Veamos primero que no es simple. Recordemos que las funciones seno y coseno complejas también son periódicas con periodo 2π: $\cos(z-2\pi) = \cos z$, $\operatorname{sen}(z-2\pi) = \operatorname{sen} z$. Esto nos permite hacer el cambio de variable $w = z - 2\pi$ en el límite para simplificar los cálculos. Aplicando primero dicha periodicidad, luego el cambio de variable en el límite y, finalmente, una proposición de la entrega anterior (Regla de L'Hôpital), vemos que

$$\lim_{z\to 2\pi} (z-2\pi)\frac{e^z}{\cos z - 1} = \lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)e^z}{\cos(z-2\pi) - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{we^{w+2\pi}}{\cos w - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{e^{w+2\pi} + we^{w+2\pi}}{-\operatorname{sen} w} = \infty$$

puesto que el numerador tiende a $e^{2\pi}$ y el denominador a cero.

Veamos ahora que el polo es doble. Recordando que $\lim_{w\to 0} \dfrac{w}{\operatorname{sen} w} = 1$, vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2\pi} (z-2\pi)^2\frac{e^z}{\cos z - 1} &= \lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)^2 e^z}{\cos(z-2\pi) - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{w^2 e^{w+2\pi}}{\cos w - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{2we^{w+2\pi} + w^2 e^{w+2\pi}}{-\operatorname{sen} w} \\
&= -\lim_{w\to 0} 2e^{w+2\pi}\frac{w}{\operatorname{sen} w} - \lim_{w\to 0} we^{w+2\pi}\frac{w}{\operatorname{sen} w} = -2e^{2\pi}
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos calcular el residuo usando la fórmula para el residuo en un polo doble y el mismo cambio de variable que antes, recordando que $e^{2\pi i} = 1$, $\lim_{w\to 0} \frac{\cos w - 1}{w^2} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{w\to 0} e^w = 1$ y aplicando primero un poco de álgebra y, al final, L'Hopital dos veces:

$$\begin{aligned}
I &= \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;2\pi) = 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \left(\frac{(z-2\pi)^2 e^z}{\cos z - 1}\right)' \\
&= 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \frac{\left(2(z-2\pi)e^z + (z-2\pi)^2 e^z\right)(\cos z - 1) + (z-2\pi)^2 e^z \operatorname{sen} z}{(\cos z - 1)^2} \\
&= 2\pi i \lim_{w\to 0} \frac{\left(2we^w + w^2 e^w\right)(\cos w - 1) + w^2 e^w \operatorname{sen} w}{(\cos w - 1)^2} = 2\pi i \frac{\lim_{w\to 0} \frac{\left(2we^w + w^2 e^w\right)(\cos w - 1) + w^2 e^w \operatorname{sen} w}{w^4}}{\lim_{w\to 0} \frac{(\cos w - 1)^2}{w^4}} \\
&= 8\pi i \lim_{w\to 0} \frac{\left(2we^w + w^2 e^w\right)(\cos w - 1) + w^2 e^w \operatorname{sen} w}{w^4} = 8\pi i \lim_{w\to 0} e^w \left(\frac{\cos w - 1}{w^2} + \frac{2(\cos w - 1) + w \operatorname{sen} w}{w^3}\right) \\
&= 8\pi i \left(-\frac{1}{2} + \lim_{w\to 0} e^w \frac{2(\cos w - 1) + w \operatorname{sen} w}{w^3}\right) = 8\pi i \left(-\frac{1}{2} + \lim_{w\to 0} \frac{2(\cos w - 1) + w \operatorname{sen} w}{w^3}\right) \\
&= 8\pi i \left(-\frac{1}{2} + \lim_{w\to 0} \frac{w\cos w - \operatorname{sen} w}{3w^2}\right) = 8\pi i \left(-\frac{1}{2} + \lim_{w\to 0} \frac{-w \operatorname{sen} w}{6w}\right) = -4\pi i. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

A continuación veremos diversas aplicaciones de carácter cuantitativo y relativas al cálculo de integrales reales (trigonométricas o de ciertas integrales impropias).

Aplicacion del Teorema de los residuos a la integración de ciertas funciones trigonométricas

Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva. Podemos parametrizarla, escribiendo cada punto $z \in \mathbb{T}$ como

$$z = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi .$$

Además, como ya sabemos de clase, se deduce de la fórmula de Euler que

$$z + \frac{1}{z} = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t, \qquad z - \frac{1}{z} = e^{it} - e^{-it} = 2i \operatorname{sen} t .$$

Por consiguiente,

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad \operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = -\frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

para los puntos $z = e^{it} \in \mathbb{T}$. Observemos que $dz = ie^{it}\,dt = iz\,dt$ y, por tanto, $dt = dz/(iz)$.

Cuando u es una función elemental de dos variables reales, todo esto nos permite escribir las diferentes integrales trigonométricas de la forma

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$$

como integrales de una función compleja sobre el contorno $\mathbb{T}$:

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = \int_{\mathbb{T}} u\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz},$$

transformando así la integral inicial de una función real en otra integral de una función de la variable z. En nuestros ejemplos, esta nueva función de z será analítica y con frecuencia racional, así que luego podremos aplicar la Fórmula integral de Cauchy o el Teorema de los residuos.

Ejercicio 4. *Calcule el valor de la integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 - 4\operatorname{sen} t}\,dt .$$

SOLUCIÓN. De manera similar a las deducción de las fórmula de arriba, también obtenemos

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right), \qquad z = e^{it} \in \mathbb{T} .$$

Aplicando las fórmulas indicadas, se deduce que

$$I = \int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - \frac{2}{i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{\mathbb{T}} \frac{z^4 + 1}{2z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}\,dz$$

La función obtenida

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{2z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}$$

tiene tres polos: un polo doble $z = 0$ y dos simples: $z = 2i$ y $z = i/2$. Esto es cierto porque $z = 2i$ y $z = i/2$ son los ceros del polinomio $-2z^2 + 5iz + 2$, lo cual permite la siguiente factorización:

$$-2z^2 + 5iz + 2 = -2(z - \frac{i}{2})(z - 2i)$$

y, por tanto,

$$f(z) = \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)} = \frac{z^4+1}{-4z^2(z-\frac{i}{2})(z-2i)}\,.$$

Dos de los polos se encuentran dentro de $\mathbb{T}$: el polo simple $i/2$ y el doble $z=0$. Aplicando las fórmula habituales para el cálculo del residuo en un polo (simple y doble, respectivamente), después de un cálculo rutinario basado en la proposición de la entrega anterior de apuntes para el cálculo del residuo en un polo, obtenemos:

$$\operatorname{Res}(f;\frac{i}{2}) = \frac{17i}{24}\,, \qquad \operatorname{Res}(f;0) = \frac{-5i}{8}\,.$$

Por el Teorema de los residuos, obtenemos

$$I = 2\pi i\cdot\left(\operatorname{Res}(f;\frac{i}{2}) + \operatorname{Res}(f;0)\right) = -\frac{\pi}{6}\,. \qquad \blacksquare$$

Aplicacion del Teorema de los residuos al cálculo de integrales impropias

El cálculo de residuos es muy efectivo para evaluar ciertas integrales impropias de funciones racionales, combinaciones de racionales y trigonométricas y otras. Debido a la falta de tiempo, este año veremos sólo algunos de los muchos tipos de integrales que se pueden calcular por este método.

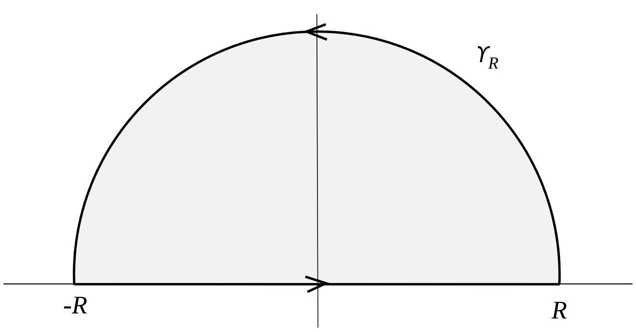
Para calcular una integral impropia: $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, normalmente consideramos la función compleja $f(z)$ (u otra muy similar y relacionada con ella) y la integramos a lo largo de un contorno convenientemente elegido. Un contorno básico y usado con frecuencia es el contorno γ_R compuesto por el intervalo $I_R=[-R,R]$ y por una semicircunferencia, C_R, desde R hasta $-R$, situada o bien en el semiplano superior o bien en el inferior, con la siguiente idea:

(1) para evaluar $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{I_R} f(z)\,dz$, identificamos las singularidades aisladas en el dominio interior a γ_R y usamos el Teorema de los residuos (o, en algunos casos especiales cuando hay sólo una singularidad aislada dentro del contorno, la Fórmula integral de Cauchy);

(2) observamos que $\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R} f(z)\,dz = I$;

(3) demostramos que, cuando $R\to+\infty$, la integral $\int_{C_R} f(z)\,dz$ tiende a cero;

(4) pasando al límite cuando $R\to+\infty$, obtenemos finalmente el valor de la integral I.



Si la función $f(x)$ involucra alguna función trigonométrica, por ejemplo, $\cos x$, conviene reemplazar esa parte de la función por e^{ix} y hacer las modificaciones correspondientes en la función compleja $f(z)$.

Si nos encontramos con algún polo u otro tipo de singularidad de f en el contorno básico γ_R, entonces será necesario modificar un poco el contorno para evitar que éste pase por las singularidades (por ejemplo, reemplazando una parte del segmento I_R por una semicircunferencia pequeña). A veces es incluso conveniente considerar otro contorno diferente (un rectángulo u otro) pero no trataremos aquí estos ejemplos.

Ejercicio 5. *Calcule la integral*

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz,$$

donde $R>1$, $\gamma_R = I_R + C_R$, $I_R = [-R, R]$, C_R es la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$ y la curva γ_R está orientada en el sentido positivo.

SOLUCIÓN. Puesto que $z^2+1 = (z-i)(z+i)$, se observa que

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\,.$$

Por tanto, f es analítica en el conjunto abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ z \neq \pm i\}$ y tiene dos polos dobles en el plano: $z = i$ y $z = -i$. Sin embargo, sólo el polo $z = i$ se encuentra en el interior de la curva γ_R (ya que, por un lado, $R > 1$ y, por otro lado, el polo $z = -i$ está en el semiplano inferior). Hallamos el valor del residuo en $z = i$ según la fórmula para un polo doble, vista antes:

$$\operatorname{Res}(f; i) = \lim_{z\to i} [(z-i)^2 f(z)]' = \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}\,.$$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Obsérvese que, alternativamente, podríamos haber usado la Fórmula integral de Cauchy para la derivada en lugar del Teorema de los residuos para obtener el mismo resultado. ■

Los cálculos como el del Ejercicio 5 serán muy importantes a la hora de evaluar diversas integrales impropias de funciones reales.

Antes de comenzar con cálculos de ciertas integrales impropias, conviene recordar que si $p \in \mathbb{R}$ y $c > 0$, la integral impropia

$$\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

converge si y sólo si $p > 1$, tal y como se puede comprobar directamente (y se vio en su día en Cálculo I).

Ejercicio 6. *Compruebe la convergencia de la integral*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y evalúela, usando el teorema de los residuos.

SOLUCIÓN. En primer lugar, la integral converge ya que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y ambas integrales convergen. La integral sobre el intervalo $[0,1]$ converge porque no es impropia sino una integral habitual de Riemann de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. La convergencia de la integral impropia sobre el intervalo $(1, +\infty)$ se justifica fácilmente usando el *criterio de comparación*, ya que

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} < \frac{1}{x^4}\,, \qquad x > 1\,,$$

y $\int_1^{\infty} (1/x^4)\, dx$ converge.

Para calcular I, utilizaremos el método de los residuos. Consideraremos el contorno ya habitual: $\gamma_R = I_R + C_R$, donde $I_R = [-R, R]$ y C_R es la semicircunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$; le daremos a γ_R la orientación positiva, de modo que el intervalo I_R se recorrerá desde $-R$ hasta R y C_R, desde R hasta $-R$.

Cuando $R > 1$, la función $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ tiene un polo doble, a saber, $z = i$, dentro de γ_R. Usando el Teorema de los residuos, en el Ejercicio 5 hemos evaluado la integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = \frac{\pi}{2}.$$

Observemos que su valor es independientemente de R, siempre y cuando $R > 1$. Por otro lado, parametrizando el intervalo I_R simplemente como $z = x$, $-R \le x \le R$, obtenemos

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Dejando que $R \to +\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx,$$

puesto que en los apuntes sobre intgrales de línea demostramos (véase el lema con dos polinomios) que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = 0.$$

Dado que $f(x) = 1/(x^2+1)^2$ es una función par, se sigue que

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx = 2I$$

y, por tanto, $I = \pi/4$. ■

El método de los residuos también es útil cuando tenemos una integral mixta, involucrando una función racional y otra trigonométrica. Primero necesitamos ver un resultado auxiliar que se usa con frecuencia.

Lema 1 *(Lema de Jordan). Para todo* $R > 0$ *se cumple la desigualdad*

$$0 < \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt < \frac{\pi}{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la *desigualdad de Jordan* vista en los cursos de Cálculo: $\operatorname{sen} t \ge \frac{2}{\pi} t$, para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, y la simetría de la gráfica de la función $e^{-R \operatorname{sen} t}$ respecto a la recta vertical $t = \pi/2$, obtenemos que

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\, dt = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right) < \frac{\pi}{R}.$$

La positividad de la integral es obvia. ■

Ejercicio 7. *Sea* C_R *la semicircunferencia del ejemplo anterior. Demuestre que*

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\, dz \to 0, \qquad R \to +\infty.$$

SOLUCIÓN. Por la desigualdad triangular, para $|z| = R > 0$ y R suficientemente grande (por ejemplo, $R > 2$ será suficiente), obtenemos $|(z-1)^2+1| \geq |z-1|^2 - 1 \geq (R-1)^2 - 1$. Escribiendo $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, observemos también que en C_R se cumple

$$|e^{iz}| = |e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}| = e^{-R\,\mathrm{sen}\, t}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que en C_R: $dz = Re^{it}\,dt$ y aplicando el Lema 1 de Jordan, obtenemos

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \left|\frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\right| |dz| \leq \frac{R}{(R-1)^2-1}\int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\, t}\,dt < \frac{\pi}{(R-1)^2-1} \to 0$$

cuando $R \to +\infty$. ■

Recordemos que, para dos funciones positivas $f, g : (a, +\infty) \to (0, +\infty)$, la notación $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, significa que el cociente $f(x)/g(x)$ tiene límite finito y no nulo cuando $x \to +\infty$. En este caso, las integrales impropias $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ convergen o divergen a la par, según el *criterio asintótico*.

Ejercicio 8. *Usando el teorema de los residuos, evalúe las siguientes integrales:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}, \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x\,dx}{(x-1)^2+1},$$

comprobando previamente su convergencia.

SOLUCIÓN. La integral I es convergente. Primero observemos que

$$\left|\frac{\cos x}{(x-1)^2+1}\right| \leq \frac{1}{(x-1)^2+1} \sim \frac{1}{x^2}, \qquad x \to \infty.$$

Dado que $\int_1^{\infty} 1/x^2\,dx$ converge, el *criterio asintótico* demuestra que converge la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2+1}$ y entonces, según el *criterio de comparación*, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}$ converge absolutamente. De manera análoga, se demuestra que converge absolutamente la integral $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}$, mientras que la integral desde -1 hasta 1 de la misma función tiene valor finito, al ser la integral de una función continua en un intervalo finito y cerrado (el denominador no se anula). La comprobación es completamente similar para la integral del seno.

Una vez demostrada la convergencia, pasamos a la evaluación de las integrales usando el Teorema de los residuos. Integraremos la función convenientemente elegida (siguiendo la recomendación de sustituir una función trigonométrica básica por una exponencial relacionada):

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}$$

sobre el mismo contorno $\gamma_R = I_R + C_R$ que en los ejemplos anteriores. Hemos elegido esta función en lugar de una con funciones trigonométricas motivados por la conocida identidad de Euler: $e^{iz} = \cos z + i\,\mathrm{sen}\, z$ (que, dicho sea de paso, sigue siendo válida para los valores complejos de z). Esta elección de f simplificará los cálculos.

Determinemos las singularidades aisladas de f. Es fácil ver que $(z-1)^2+1 = 0$ si y sólo si $z-1 = \pm i$, es decir, los ceros del denominador son $z = 1 \pm i$. Así obtenemos la factorización

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)}$$

De los dos polos simples de f, sólo $z = 1+i$ se encuentra dentro de γ_R, cuando R es suficientemente grande: $R > |1+i| = \sqrt{2}$. Es fácil calcular el residuo en este polo:

$$\operatorname{Res}(f;1+i)=\lim_{z\to 1+i}(z-1-i)f(z)=\lim_{z\to 1+i}\frac{e^{iz}}{z-1+i}=\frac{e^{-1+i}}{2i}\,.$$

Según el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\operatorname{Res}(f;1+i)=2\pi i\cdot\frac{e^{-1+i}}{2i}=\pi e^{-1}(\cos 1+i\operatorname{sen}1)\,.$$

Una vez más, tenemos

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{-R}^{R} f(x)\,dx\,.$$

En el Ejercicio 7 ya hemos demostrado que $\int_{C_R} f(z)\,dz\to 0$, cuando $R\to+\infty$, utilizando el *lema de Jordan*. Finalmente, pasando al límite cuando $R\to+\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{e}(\cos 1+i\operatorname{sen}1)=\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{(x-1)^2+1}\,.$$

Igualando las partes reales e imaginarias en los dos extremos de la igualdad anterior, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}=\frac{\pi}{e}\cos 1\,,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{(x-1)^2+1}=\frac{\pi}{e}\operatorname{sen}1\,.\qquad\blacksquare$$

La complicación en el siguiente (y último) ejercicio reside en la necesidad de definir correctamente la función elegida como función analítica (es decir, hay que elegir un dominio conveniente para definir el logaritmo para que sea holomorfo), además de modificar el contorno. Este último ejemplo se puede omitir en una primera lectura.

Ejercicio 9. *Calcule la integral*

$$I_p=\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,dx\,,$$

comprobando previamente su convergencia para todo $p\in(-1,1)$.

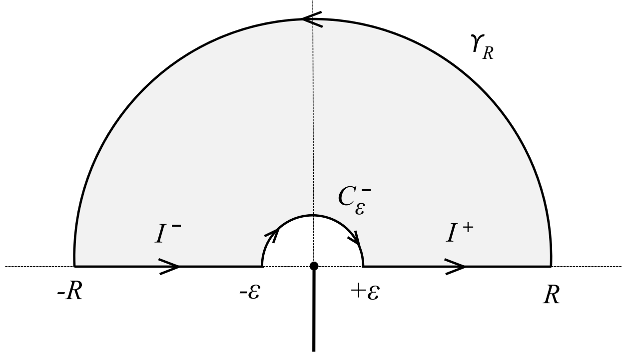
SOLUCIÓN. Cerca de $x=0$, la función $x^p/(1+x^2)\sim x^p$ y la integral $\int_0^1 x^p\,dx$ converge si y sólo si $p>-1$. Por tanto, la integral $\int_0^1\frac{x^p}{1+x^2}\,dx$ converge si y sólo si $p>-1$. Cuando $x\to+\infty$, la función $x^p/(1+x^2)\sim 1/x^{2-p}$ y $\int_1^{+\infty}1/x^{2-p}\,dx$ converge si y sólo si $p<1$. Por consiguiente, I_p converge si y sólo si se cumplen a la vez ambas condiciones: $p>-1$ y $p<1$.

Consideraremos la función compleja $f(z)=z^p/(1+z^2)$ definida en un dominio adecuado. Por ejemplo, podemos definir la función $z^p=e^{p\log z}$, eligiendo la siguiente determinación del logaritmo:

$$\log z=\ln|z|+i\arg z\,,\qquad z\in\Omega=\{z\in\mathbb{C}:-\pi/2<\arg z<(3\pi)/2\}\,,$$

el plano menos el semieje imaginario negativo.

Conviene elegir el siguiente contorno: $\gamma_{R,\varepsilon}$ en Ω: $\gamma_{R,\varepsilon}=C_R+I^-+C_\varepsilon^-+I^+$, donde R es grande y ε pequeño, $C_R=\{z=Re^{it}:\ 0\le t\le\pi\}$ es la semi-circunferencia de centro en el origen y radio R contenida en el semiplano superior, recorrida en el sentido positivo desde R hasta $-R$, $I^-=[-R,-\varepsilon]$ (intervalo en el semieje real negativo), $C_\varepsilon^-=\{z=\varepsilon e^{it}:\pi\ge\varepsilon\ge 0\}$ es una semi-circunferencia contenida en el semiplano superior, de centro en el origen y radio ε y recorrida en el sentido negativo desde $-\varepsilon$, pasando por $i\varepsilon$, hasta ε (de ahí que normalmente se escriba $\pi\ge\varepsilon\ge 0$ para indicar la dirección del movimiento) y, por fin, $I^+=[\varepsilon,R]$, un intervalo en el semieje real positivo. De esta forma el contorno, junto con el dominio interior que acota, se queda dentro del dominio Ω donde está definido el logaritmo complejo.



Nuestra función f es holomorfa en Ω, salvo en un polo simple, $z = i$, que se encuentra en el interior del contorno. Teniendo en cuenta que $i = e^{\pi i/2}$ y, por tanto, $i^p = e^{\pi i p/2}$, calculamos el residuo correspondiente:

$$\operatorname{Res}(f;i) = \frac{i^p}{2i} = \frac{\cos(\pi p)/2 + i\,\operatorname{sen}(\pi p)/2}{2i}$$

Es fácil ver que

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \pi R \cdot \frac{R^p}{R^2-1} \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,,$$

ya que $p+1<2$. De manera similar,

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \le \pi\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^p}{1-\varepsilon^2} \to 0\,, \qquad \varepsilon \to 0^+\,,$$

teniendo en cuenta que $p+1>0$.

Cuando $z \in I^-$, tenemos que $z = x < 0$ y por tanto $\log z = \ln(-x) + \pi i$. Con la determinación del logaritmo escogida, calculamos

$$z^p = e^{p\log z} = e^{p\ln(-x)+p\pi i} = e^{p\pi i} = (\cos(\pi p) + i\,\operatorname{sen}(\pi p)) \cdot (-x)^p$$

y, por tanto,

$$\int_{I^-} f(z)dz = (\cos(\pi p) + i\,\operatorname{sen}(\pi p)) \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(-x)^p}{1+x^2}dx = (\cos(\pi p) + i\,\operatorname{sen}(\pi p)) \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^p}{1+x^2}dx$$

(cambiando x por $-x$).

Puesto que $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ cuando $R \to +\infty$ y $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ cuando $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos en el límite que

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res}(f;i) &= \pi(\cos\frac{\pi p}{2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi p}{2}) = \lim_{R\to+\infty,\,\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz \\ &= (\cos(\pi p) + i\,\operatorname{sen}(\pi p)) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx\,. \end{aligned}$$

Tomando las partes reales y usando la identidad $\cos(2x) + 1 = \cos^2 x$, obtenemos

$$\pi\cos\frac{\pi p}{2} = (\cos(\pi p) + 1) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx = 2\cos^2\frac{\pi p}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx\,,$$

Despejando la integral, se sigue que

$$I_p = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}\,. \qquad \blacksquare$$

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20, con la ayuda técnica de José Pedro Moreno