Variable Compleja I (Curso 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Ceros de funciones analíticas

En esta entrega de apuntes veremos las propiedades básicas de los ceros de una función holomorfa. Resultará que una función analítica no idénticamente nula comparte ciertas propiedades de factorización con los polinomios y que, además, sus ceros han de cumplir cierta condición topológica muy rígida.

Orden (multiplicidad) de un cero

Una versión más fuerte de la unicidad de la serie de Taylor. Empezaremos por el siguiente resultado auxiliar que arroja más luz sobre algo que ya sabíamos antes: la unicidad de la serie de Taylor y que será clave para el resto de los resultados.

Teorema 1. *Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y supongamos que en cierto punto $c \in \Omega$ se cumple la condición $f^{(n)}(c) = 0$ para todo $n \ge 0$. Entonces $f \equiv 0$ en Ω (es decir: $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$).*

Enunciado equivalente: Si Ω es un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c;R) \subset \Omega$ (con $R > 0$), entonces $f \equiv 0$ en Ω

Demostración. En primer lugar, veamos la equivalencia de ambos enunciados. Son equivalentes porque resulta que sus hipótesis son equivalentes. En efecto, si para un $R > 0$ se cumple que $D(c;R) = \{z : |z-c| < R\} \subset \Omega$, entonces f tiene en desarrollo único en serie de Taylor que converge en $D(c;R)$. Suponiendo que $f^{(n)}(c) = 0$ para todo $n \ge 0$, se sigue que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n = 0$ para todo $z \in D(c;R)$. Recíprocamente, si $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c;R) \subset \Omega$, de la unicidad de su desarrollo en serie de Taylor en $D(c;R)$ se desprende que todos los coeficientes de Taylor en $z = c$ son nulos y, por tanto, $f^{(n)}(c) = 0$ para todo $n \ge 0$.

Veamos ahora cómo se demuestra el segundo enunciado. Sabiendo que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c;R) \subset \Omega$, veremos a continuación que $f \equiv 0$ en Ω, usando una cadena de discos abiertos a los que se aplicará el mismo razonamiento que en el párrafo anterior.

Sea p cualquier otro punto en Ω ($p \ne c$). Demostraremos que $f(p) = 0$ y, dado que p es arbitrario, el resultado se seguirá. Como ya sabemos, podemos unir c con p mediante una curva simple y suave a trozos. Conviene usar una línea poligonal L con los lados paralelos a los ejes, como en otras pruebas. Eligiendo δ tal que $0 < \delta \le \operatorname{dist}(L, \partial\Omega)$, es inmediato que $L \subset \bigcup_{z\in L} D(z;\delta)$, así que tenemos un recubrimiento de L por discos abiertos del mismo radio δ, todos ellos contenidos en Ω. Debido a la compacidad de L, podemos elegir un subrecubrimiento finito:

$$L \subset \bigcup_{k=1}^{m} D(c_k;\delta) \subset \Omega, \qquad c_k \in L, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Podemos renombrar los puntos c_k de manera que, si $L : [0,1] \to \mathbb{C}$, $L(t_k) = c_k$, con $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = 1$. Es decir, que al recorrer L desde su punto inicial hasta su punto final, primero pasemos por c_1, luego por c_2, etc., hasta c_m. Añadiendo hasta dos discos más si fuera necesario, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_1 = c$, $c_m = p$ (abusando de notación, el número de discos se seguirá llamando m). Recordando que L es una línea poligonal y teniendo en cuenta el orden elegido de los puntos c_k, $1 \le k \le m$, puede demostrarse (aunque no daremos una prueba rigurosa de este hecho) que cada dos discos consecutivos se cortan:

$$D(c_k, \delta) \cap D(c_{k+1}, \delta) \neq \emptyset, \qquad 1 \le k \le m-1.$$

También podemos hacer la siguiente modificación del recubrimiento si fuera preciso. Si $c_2 \in D(c_1; \delta)$, no modificamos nada. Si $c_2 \notin D(c_1; \delta)$, razonamos como sigue. Puesto que existe un punto $c \in D(c_1, \delta) \cap D(c_2, \delta)$, por la desigualdad triangular vemos que

$$|c_1 - c_2| \le |c_1 - c| + |c - c_2| < 2\delta.$$

Ahora es inmediato que el punto medio $q = (c_1 + c_2)/2$ del segmento $[c_1, c_2]$ tiene distancia inferior a δ de cada uno de los extremos del intervalo:

$$|c_1 - q| = |c_2 - q| = \frac{|c_1 - c_2|}{2} < \delta.$$

Por tanto, $q \in D(c_1, \delta)$ y $c_2 \in D(q; \delta)$. Vamos a ampliar la colección de discos $D(c_k; \delta)$ añadiendo el disco $D(q; \delta)$. Razonando de manera similar con c_2 y c_3 y continuando el proceso, si fuera necesario, podemos añadir hasta $m-1$ discos más, todos ellos de radio δ, hasta obtener un nuevo recubrimiento finito (por $n \le 2m-1$ discos y con los centros renombrados como a_k, $1 \le k \le n$):

$$L \subset \bigcup_{k=1}^{n} D(a_k; \delta) \subset \Omega, \qquad c_k \in L, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

con $a_1 = c$, $a_n = p$ y con la propiedad de que $a_2 \in D(a_1, \delta)$, $a_3 \in D(a_2, \delta)$, $\ldots$, $p = a_n \in D(a_{n-1}, \delta)$. Es decir, el centro de cada disco pertenece al disco anterior en la cadena.

¿Qué conseguimos con esto? Puesto que ya sabemos que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c; R)$, se tiene que $D(a_1; \delta) = D(c; \delta) \subset D(c; R)$ y $a_2 \in D(a_1; \delta)$. Cada disco abieto es un conjunto abierto, así que existe un disco más pequeño $D(a_2; r) \subset D(a_1; \delta)$ tal que $f(z) = 0$ en todos los puntos de $D(a_2; r)$. Esto significa que también todas las derivadas de f se anulan en $D(a_2; r)$ y, en particular, en el punto a_2. (Obsérvese que no nos vale sólo que $f(a_2) = 0$, necesitamos que todas las derivadas se anulen en dicho punto.) Aplicando el mismo razonamiento con la serie de Taylor que al principio de la demostración, esta vez al disco $D(a_2; \delta)$ en cuyo centro se anulan todas las derivadas de f, se sigue que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a_2; \delta)$. Continuando así, vemos que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a_3; \delta)$, etc., hasta obtener que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a_n; \delta) = D(p; \delta)$. En particular, $f(p) = 0$. ■

Observación. El Teorema 1 nos dice que si una función analítica en un dominio se anula sólo en un disco, entonces se anula en todo el dominio. Es un ejemplo más de los diversos principios de rigidez para las funciones analíticas que no se dan en Variable real.

Un objetivo de estos apuntes es demostrar una versión aún más fuerte de este resultado, llamada el Principio de los ceros aislados. Éste nos dirá que es suficiente que una función holomorfa en un dominio se anule en una sucesión con un punto de acumulación en el dominio para que sea idénticamente nula en el dominio. Entonces, ¿Por qué hemos probado primero un resultado más débil? Porque lo usaremos en la demostración de algunos resultados que siguen. El primero de ellos se usa con frecuencia, aunque no siempre se enuncia de forma explícita en los textos.

Corolario 1. *Sea Ω un dominio en el plano, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, y supongamos que los desarrollos en serie de Taylor de f y de g coinciden en un disco $D(c; R) \subset \Omega$. Entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Considerando la diferencia $h = f - g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y la diferencia de las series de Taylor correspondientes, el enunciado es equivalente a la siguiente implicación:

Si la serie de Taylor de h es cero en $D(c;R) \subset \Omega$, entonces $h(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ (es decir, $h \equiv 0$ en Ω).

Pero la condición de que la serie de Taylor de h sea cero en $D(c;R)$ es equivalente, por la unicidad de sus coeficientes (véanse los apuntes sobre holomorfía), que $h^{(n)}(c) =$ para todo $n \geq 0$. Con estas condiciones, el Teorema 1 implica inmediatamente que $h \equiv 0$ en Ω y el resultado queda demostrado. ■

El orden de un cero de una función analítica. Ahora veremos que cada cero de una función analítica da lugar a una factorización como las que ya vimos en la factorización de polinomios, asi que también podremos hablar del orden (o de la multiplicidad) de un cero.

Corolario 2. *Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ y supongamos que existe un punto $c \in \Omega$ tal que $f(c) = 0$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0\,, \qquad f^{(m)}(c) \neq 0\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $f \not\equiv 0$, se sigue directamente del Teorema 1 que existe, al menos, un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(c) \neq 0$. Eligiendo m como el menor índice con esta propiedad, se sigue la afirmación formulada en el enunciado. ■

Proposición 1. *Sea Ω un dominio en el plano, $c \in \Omega$, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y supongamos que $f(c) = 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0$, $f^{(m)}(c) \neq 0$;

(b) $f(z) = (z-c)^m g(z)$, *para todo* $z \in \Omega$, *donde* $g \in \mathscr{H}(\Omega)$, *viene dada por*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-c)^m}, & \text{si } z \in \Omega \setminus \{c\} \\ a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}, & \text{si } z = c \end{cases}$$

y $g(c) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. La implicación que más nos interesa es la directa y es la que probaremos primero y detalladamente.

(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos que f satisface la condición (a). Sea $R > 0$ tal que $D(c;R) \subset \Omega$. Sabemos entonces que f se puede desarrollar en serie de Taylor convergente en $D(c;R)$. Escribiendo $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y teniendo en cuenta que, por hipótesis, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$, dicha serie tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-c)^n = (z-c)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-c)^{n-m}\,, \tag{1}$$

ya que es fácil ver (y lo hemos comentado en los apuntes sobre series de potencias) que las dos últimas series de potencias en la cadena de igualdades tienen el mismo radio de convergencia.

Definamos la función g como

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-c)^m}, & \text{si } z \in \Omega \setminus \{c\} \\ a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}, & \text{si } z = c \end{cases}\,.$$

Por la regla del cociente, g tiene derivada en cada punto $z \in \Omega \setminus \{c\}$, así que sólo queda por ver que también es derivable en $z = c$. En virtud de (1), la restricción de g al disco $D(c;R)$ coincide con la serie de potencias

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-c)^{n-m}$, que es una función holomorfa en $D(c;R)$. Por tanto, g también es holomorfa en $z=c$ y luego en todo Ω. Obviamente, $g(c)=\frac{f^{(m)}(c)}{m!}\neq 0$.

Puesto que ambas funciones $f(z)$ y $(z-c)^m g(z)$ son holomorfas en Ω y coinciden en el disco $D(c;R)$, aplicando el Corolario 2, concluimos que $f(z)=(z-c)^m g(z)$ en Ω. Con esto quedan probadas todas las afirmaciones del apartado (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): No escribiremos todos los detalles meticulosamente ya que las cuentas son un poco engorrosas, pero el esquema de la comprobación deberia verse con claridad. Si suponemos que la relación entre f y g es como en el apartado (b), la regla de Leibniz para la derivada m-ésima del producto (fácil de demostrar por inducción):

$$(uv)^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(z)v^{(n-k)}(z)$$

implica fácilmente que

$$f^{(n)}(z)=\big((z-c)^m g(z)\big)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m(m-1)\dots(m-k+1)(z-c)^{m-k}g^{(n-k)}(z),\qquad 0\le n\le m.$$

Evaluando en $z=c$ las derivadas de orden $n=0,1,\dots,m$, vemos que $f(c)=f'(c)=\dots=f^{(m-1)}(c)=0$ puesto que en cada una de ellas todos los sumandos se anulan en c, mientras que

$$f^{(m)}(c)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}m(m-1)\dots(m-k+1)(z-c)^{m-k}|_{z=c}\,g^{(m-k)}(c)=m!g(c)\neq 0,$$

ya que son nulos todos los términos de la suma menos el último. ■

Definición. El número m al que se refieren el Corolario 2 y la Proposición 1 se denomina el *orden* (o la *multiplicidad* del cero $z=c$ de la función f. Si $m=1$, se dice que c es un *cero simple* y si $m=2$, se suele decir que c es un *cero doble* de f.

Ejemplo 1. *La función $f(z)=ze^z$ tiene un cero, $z=0$, puesto que la exponencial no se anula. Se trata de un cero simple puesto que $f(0)=0$ y $f'(z)=(1+z)e^z$ y, por tanto, $f'(0)=1\neq 0$. En este caso, es obvio quiénes son $(z-c)^m$ y g en la Proposición 1: son z y e^z, respectivamente.*

Ejemplo 2. *La función $f(z)=1-\cos z$ también tiene un cero en $z=0$: $f(0)=1-\cos 0=0$. Puesto que*

$$f'(z)=\operatorname{sen} z,\quad f'(0)=0,\qquad f''(z)=\cos z,\quad f''(0)=\cos 0=1\neq 0,$$

se sigue que $z=0$ es un cero de orden dos (o cero doble) de f. En este caso, los factores de la Proposición 1 son: $(z-c)^m=z^2$ y $g(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$, para $z\neq 0$ y $g(0)=1/2$. Volveremos a este tipo de ejemplos cuando hablemos de las singularidades evitables en la siguiente entrega.

Principio de los ceros aislados (Teorema de la unicidad)

El siguiente resultado nos indica que los ceros de una función analítica (no idénticamente nula), no pueden acumularse en el dominio de su analiticidad. En otras palabras, basta suponer una hipótesis mucho más débil que la del Teorema 1 (la anulación en un disco). Es otro ejemplo más de la rigidez de las condiciones que describen el comportamiento de una función holomorfa (analítica).

Teorema 2 *(Principio de los ceros aislados). Sea Ω un dominio en el plano y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si existe un punto $c \in \Omega$ y una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en Ω de puntos distintos de c tales que* $\lim_{n\to\infty} z_n = c$ *y $f(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \equiv 0$ en Ω.*

Dicho de otra manera, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y no es la constante nula, para todo cero $z = c$ de f en Ω existe un $r > 0$ (dependiente de c) tal que en el disco agujereado $D(c;r)\setminus\{c\}$ no hay ceros de f. (Los ceros de una función analítica no idénticamente nula son puntos aislados.)

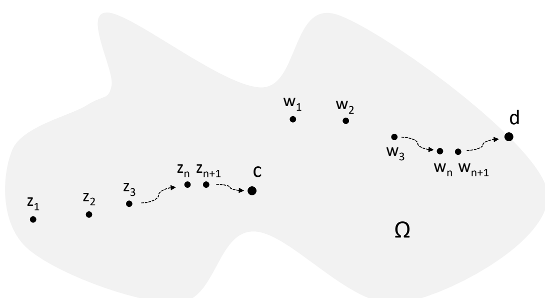
DEMOSTRACIÓN. Puesto que f es holomorfa en Ω, es continua allí. Dado que $c = \lim_{n\to\infty} z_n$, se sigue que $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Sea $R > 0$ tal que $D(c;R) \subset \Omega$. La serie de Taylor de f converge en $D(c;R)$ y, debido al cero que tiene f en $z = c$, tiene la forma $f(z) = a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \ldots$. Para ver que $f \equiv 0$ en Ω, basta demostrar que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c;R)$, según el Teorema 1. Por tanto, nos basta demostrar que $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Lo haremos por inducción.

Ya sabemos que $a_0 = f(c) = 0$. Supongamos ahora que, para cierto $m \in \mathbb{N}$, se cumple $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ y veamos que también $a_m = 0$. Si definimos la función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ como en la Proposición 1,

Recordemos que, por hipótesis, $z_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos evaluar

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n - c)^m} = 0\,.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, se sigue de la continuidad de g (y de cómo está definida en $z = c$) que $a_m = g(c) = 0$. Esto concluye la demostración inductiva. ∎



Es importante resaltar que el teorema no es válido si los ceros de f se acumulan en un punto $d \in \partial\Omega$. Veremos algunos ejemplos a continuación.

Ejemplo 3. *Si $\mathbb{D}$ es el disco unidad y disponemos de la siguiente información de una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$:*

$$f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}\right) = 0\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces ya podemos determinar f explícitamente. En efecto, los puntos $\frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}$ todos pertenecen a $\mathbb{D}$ puesto que $\left|\frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, son todos distintos de $c = \frac{1}{3}$ y convergen a dicho punto cuando $n \to \infty$. El Teorema 2 implica que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$.

Ejemplo 4. *(La hipótesis acerca de la acumulación de los ceros en un punto del dominio es imprescindible.) Consideremos la función $f(z) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{z}$. Evidentemente, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Es claro que $f(\frac{1}{n}) = \operatorname{sen}\pi n = 0$ y los puntos $\frac{1}{n} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Sin embargo, el punto límite no está en el dominio de holomorfía de la función, $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ sino en su frontera. Por tanto, no nos está permitido aplicar el Principio de los ceros aislados para concluir que la función f es nula. De hecho, sabemos que no lo es porque es fácil encontrar muchos puntos en los que la función tiene, por ejemplo, valor 1.*

Corolario 3 *(Teorema de unicidad). Sea Ω un dominio en el plano y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si existe un punto $c \in \Omega$ y una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en Ω de puntos distintos de c tales que $\lim_{n\to\infty} z_n = c$ y $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \equiv g$ en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema 2 a la diferencia $h = f - g$. ■

Ejercicio 1. *Encuentre todas las funciones enteras que satisfagan la condición $f(z) = f(2z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, usando el Teorema de la unicidad.*

SOLUCIÓN. Fijemos un punto $w \in \mathbb{C}$ arbitrario pero distinto de 0. Aplicando la condición $f(z) = f(2z)$ al punto $z = w/2$, vemos que $f(w) = f(w/2)$. Siguiendo de manera análoga, obtenemos que $f(w/2) = f(w/4)$, etc. Por inducción se sigue que

$$f(w) = f\left(\frac{w}{2}\right) = f\left(\frac{w}{4}\right) = f\left(\frac{w}{8}\right) = \ldots = f\left(\frac{w}{2^n}\right) = \ldots, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es inmediato que la función constante $g(z) = f(w)$ coincide con f en todos los puntos $\frac{w}{2^n}$. Puesto que w es fijo, $\frac{w}{2^n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ (basta tomar el módulo para verlo). Por el Corolario 3, se sigue que $f \equiv g$, es decir, $f \equiv f(w)$: es una función constante. Obviamente, toda función constante cumple la condición dada. ■

Ejercicio 2. *Halle razonadamente todas las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ que cumplan la condición $f(1/n) = 2/n^2$.*

SOLUCIÓN. Consideremos la sucesión $z_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Despejando n, vemos que $n = 1/z_n$, luego $n^2 = 1/z_n^2$, así que $2/n^2 = 2z_n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que las funciones f y $g(z) = 2z^2$, ambas holomorfas en $\mathbb{D}$, coinciden en los puntos z_n, $z_n \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \in \mathbb{D}$. Por el Teorema de la unicidad (Corolario 3), se sigue que $f(z) = 2z^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$. ■

Corolario 4. *Sea Ω un dominio en el plano y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función tal que $f \not\equiv 0$ en Ω. Entonces f tiene, como mucho, una cantidad numerable de ceros en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Si f no tiene ceros, no hay nada que demostrar. Si tiene, al menos, un cero, debido al Teorema 2, cada cero $z = c$ de f en Ω es aislado: existe un $r > 0$ (dependiente de c) tal que en el disco $D(c;r)$ no hay más ceros de f aparte de c. En cada disco $D(c;r/2)$ (de la mitad de radio -¡importante!) podemos elegir un punto con las partes real e imaginaria ambas racionales (y distinto de c). Esto establece una función entre el conjunto de los ceros de f y los puntos con ambas coordenadas racionales (que es numerable).

Es fácil ver que dicha función es inyectiva: usando la desigualdad triangular, puede verse que ningún punto puede ser común a dos discos distintos $D(c_1;r_1/2)$ y $D(c_2;r_2/2)$: si existiese tal punto w, satisfaría las desigualdades $|c_1 - w| < r_1/2$ y $|w - c_2| < r_2/2$ y entonces la desigualdad triangular nos daría $|c_1 - c_2| < r_1/2 + r_2/2 \leq \max\{r_1, r_2\}$. Pero la última desigualdad es imposible puesto que $c_2 \notin D(c_1;r_1)$ y $c_1 \notin D(c_2;r_2)$ y, por tanto, $|c_1 - c_2| \geq r_1$ y $|c_1 - c_2| \geq r_2$.

Una vez comprobado que tenemos una función inyectiva entre el conjunto de los ceros de f en Ω y los racionales, se sigue que los ceros forman un conjunto, como mucho, numerable. ■

Ejemplo 5. *Cualquier cantidad de ceros, finita o numerable, es posible. Daremos ejemplos de cada situación en el caso cuando $\Omega = \mathbb{C}$ (funciones enteras).*

La función $f(z) = e^z$ no tiene ceros.

Un polinomio de grado n, $n \in \mathbb{N}$, tiene exactamente n ceros, contando las multiplicidades (y, por supuesto, es fácil dar un ejemplo de un polinomio con todos los ceros distintos).

La función $f(z) = \operatorname{sen} z$ tiene una cantidad infinita numerable de ceros: ya hemos visto que sus ceros son precisamente los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (que no se acumulan en ningún punto en el plano).

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador en 2019-20 (ayuda técnica: Prof. José Pedro Moreno)