Variable Compleja I (CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Teorema integral de Cauchy. Función primitiva

En primer lugar, conviene tener en cuenta que el estudio de las integrales de línea es importante y útil. No se ha desarrollado sólo por el amor al arte y, desde luego, no con el fin de complicar el ya complejo cuadro de las funciones holomorfas (analíticas). Dicho estudio surge de las necesidades naturales. Con frecuencia no disponemos de una fórmula explícita para una función analítica; incluso cuando se tiene, algunas propiedades de la función no son fáciles de deducir directamente de ella. En muchos casos, las funciones holomorfas vienen dadas como series funcionales (ya hemos visto algunos ejemplos), otras veces como productos infinitos (se verán ejemplos en Variable Compleja II) y a veces como integrales que dependen de un parámetro complejo, en ocasiones como funciones inversas locales de otras holomorfas o en otra forma. Al no tener una información completa sobre una función analítica, resulta útil poder obtener cierta información parcial.

Los matemáticos del siglo XIX (entre ellos, notablemente Cauchy) descubrieron que los valores de ciertas integrales de línea con frecuencia nos proporcionan información muy útil sobre la función. Por ejemplo, en relación con la Fórmula integral de Cauchy, hemos visto que basta conocer los valores de una función holomorfa sólo en una circunferencia para poder evaluar la función y sus derivadas en cualquier punto interior a la circunferencia. Resulta que este hecho se puede generalizar a cualquier contorno en lugar de una circunferencia. Recordemos que, por el Teorema de Jordan, cada contorno γ determina dos componentes conexas del complementario de su traza, $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$: un dominio acotado (el dominio interior a γ, al que a menudo denotamos D_{int}) y otro no acotado (el dominio exterior a γ, al que denotamos D_{ext}). Esto nos permitirá formular una versión más general de la fórmula integral de Cauchy, que se probará en esta entrega de apuntes, incluida la versión de la fórmula para las derivadas en un punto arbitrario en el interior del contorno, un resultado que se enunció pero no se demostró en la entrega anterior. Hablaremos también brevemente del índice de una curva respecto de un punto y de su significado geométrico.

Demostraremos también el teorema integral de Cauchy que es otro resultado fundamental en Variable Compleja. En su versión más sencilla, este teorema nos dice que si una curva suave a trozos, simple y cerrada (un contorno) está contenida en un dominio simplemente conexo donde una función es analítica, entonces la integral de la función a lo largo de la curva es igual a cero. Resulta fascinante poder evaluar una integral de línea de una función tan sólo conociendo alguna propiedad topológica de la curva y el hecho de que la función tiene derivada compleja, sin disponer de ningún otro tipo de información. Desde luego, no hay un análogo de este resultado en otros campos del análisis matemático. Lo más sorprendente es que esta propiedad, de hecho, caracteriza las funciones holomorfas de entre todas las funciones continuas en el dominio, según el Teorema de Morera.

Una versión más general del Teorema integral de Cauchy nos enseñará que, en un dominio simplemente conexo, la integral de una función analítica a lo largo de cualquier curva que una dos puntos dados tiene el mismo valor (es independiente del camino), lo cual nos permitirá definir las funciones primitivas. Al igual que en Cálculo, la diferencia de dos primitivas cualesquiera de la misma función será constante. Veremos también que, en un dominio simplemente conexo, la existencia de una prmitiva es equivalente a la holomorfía, gracias también a los conocimientos adquiridos previamente. Formularemos, aunque sin demostración, el Gran teorema acerca de los dominios simplemente conexos que nos dará una caracterización de dichos dominios en términos de las funciones que son holomorfas en ellos. Esto representa un importante nexo entre la topología del plano y la variable compleja.

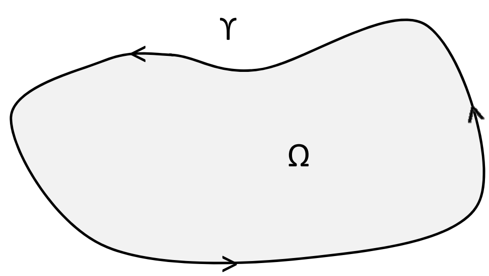
Si se dispone de suficiente tiempo, sería muy útil complementar la lectura de estos apuntes con la de los del Profesor Sánchez-Calle, al menos estudiando el esquema del desarrollo de la teoría allí expuesta, sin entrar en todos los detalles de la prueba. No obstante, en un principio, el material aquí tratado ya debería ser suficiente para poder resolver todos los ejercicios de la hoja 7 de problemas relacionados con el tema de integración compleja.

La fórmula de Green. Teorema integral de Cauchy

Teorema de Green. De los cursos anteriores conocemos la fórmula de Green. El enunciado que aquí nos interesa, se refiere a los dominios de Jordan acotados por una curva simple y cerrada y C^1 a trozos (lo que ya hemos llamado un contorno con anterioridad). Empezaremos recordándolo.

Teorema 1 *(Green). Si Ω es un dominio en el plano, acotado por un contorno γ, orientado positivamente (en el sentido contrario al de las agujas de reloj). Si las funciones $P, Q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 en $\overline{\Omega}$, entonces*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$



Observaciones. (1) En la literatura se pueden encontrar enunciados tanto más especiales como más generales que el que damos aquí. Es posible que en los cursos de Cálculo II o Análisis Matemático este teorema se haya formulado sólo para dominios un poco más especiales (con mejor frontera, por ejemplo los convexos o los que tengan frontera suave, simple y cerrada) pero aquí necesitaremos la versión general dada arriba.

(2) La integral doble que aparece en el lado derecho de la fórmula se puede tomar tanto sobre Ω como sobre $\overline{\Omega}$ puesto que la frontera Ω tiene medida de área nula y, por tanto, no influye en la integración. No obstante, la hipótesis sobre la continuidad de las derivadas parciales hasta la frontera es importante. No es suficiente pedir que sean continuas sólo en Ω (porque si, por ejemplo, no están acotadas cuando nos acercamos a la frontera del dominio, esto podría dar problemas).

Antes de ilustrar el uso del Teorema de Green en Variable Compleja, conviene recordar de la entrega de apuntes sobre las integrales de línea que, en una integral a lo largo de la curva γ, escribiremos con frecuencia $dz = dx + i dy$. Esto es natural: si la curva está parametrizada como $z = \gamma(t)$, es decir, $x + yi = u(t) + iv(t)$, entonces $\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) = u'(t) + iv'(t) = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$, etc.

Ejercicio 1. *Sea f una función holomorfa en un dominio D y γ un contorno orientado positivamente que encierra un dominio Ω, donde $\Omega \cup \{\gamma\} \subset D$. Pruebe que*

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz = 2i \iint_\Omega \overline{f'(z)}\,dx\,dy.$$

SOLUCIÓN. Escribiendo $f = u + iv$, tenemos que $\overline{f} = u - iv$. Además, al ser holomorfa en D, la función f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en D. Conocemos también la fórmula para la derivada de la función holomorfa $f = u + iv$: $f' = u_x + iv_x$ de la parte presencial del curso; por tanto, $\overline{f'} = u_x - iv_x$.

De los apuntes anteriores, sabemos que f es analítica y, en particular, su derivada es continua, luego f y, por tanto, u y v son de clase C^1 en D. Se cumplen todas las condiciones para poder aplicar el Teorema 1 de Green al recinto $\Omega \cup \{\gamma\}$, en una de las integrales con $P = u$, $Q = v$ y en la otra con $P = -v$, $Q = u$:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz &= \int_\gamma (u - iv)(dx + i dy) = \int_\gamma u\,dx + v\,dy + i \int_\gamma u\,dy - v\,dx \\
&= \iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial(-v)}{\partial y}\right) dx\,dy \\
&= \iint_\Omega (v_x - u_y)\,dx\,dy + i \iint_\Omega (u_x + v_y)\,dx\,dy \\
&= \iint_\Omega 2v_x\,dx\,dy + i \iint_\Omega 2u_x\,dx\,dy \\
&= 2\iint_\Omega (v_x + iu_x)\,dx\,dy = 2i \iint_\Omega (u_x - iv_x)\,dx\,dy \\
&= 2i \iint_\Omega \overline{f'(z)}\,dx\,dy. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

El Ejercicio 1 nos debería dar una pista obvia para resolver el primer ejercicio de la hoja 7.

Teorema integral de Cauchy: versión para contornos. El Teorema integral de Cauchy es uno de los resultados fundamentales en Análisis complejo y tiene diferentes enunciados, más especiales o más generales. Empezaremos con una versión sencilla. Para poder enunciar y utilizar los teoremas de Cauchy que nos interesan en esta sección, consideraremos típicamente un contorno γ que, junto con su dominio interior, está contenido en un dominio Ω donde cierta función f es holomorfa (analítica).

Antes de enunciar y demostrar el resultado, es muy importante resaltar que la demostración dada abajo es posible gracias a la versión suficientemente general del Teorema de Green formulada en el Teorema 1 y al trabajo hecho en los apuntes anteriores, con la demostración de la Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias. Sin este último resultado hubiera sido mucho más difícil demostrar cualquier versión del Teorema integral de Cauchy. Tanto es así que incluso el enunciado para los rectángulos o triángulos (cuya demostración se debe a Goursat) requiere un trabajo muy serio y unos razonamientos muy precisos. Recomendamos como lectura complementaria los apuntes del Profesor Antonio Sánchez-Calle (disponibles en Moodle y en la página web) para consultar la prueba de este resultado, una auténtica joya de las matemáticas, y la definición de la función primitiva.

Teorema 2 *(Teorema integral de Cauchy, enunciado básico para curvas simples). Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y γ un contorno (curva simple y cerrada, C^1 a trozos) cuya traza está contenida en Ω. Entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Otro enunciado (equivalente): Sea Ω un dominio arbitrario en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y γ un contorno cuya traza está contenida en Ω junto con el dominio D_{int} interior a γ: $\overline{D_{\text{int}}} = D_{\text{int}} \cup \{\gamma\} \subset \Omega$. Entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Cabe observar que, cuando Ω es un dominio simplemente conexo y $\{\gamma\} \subset \Omega$, entonces Ω contiene junto con γ al dominio interior acotado por γ. Por tanto, la primera versión del enunciado es un caso especial del segundo enunciado.

El segundo enunciado también se puede deducir del primero, así que ambos son equivalentes. Basta reducir el dominio inicial hasta obtener uno que sea simplemente conexo y contenga a la traza de la curva y al dominio interior. Eso se puede conseguir, por ejemplo, de la siguiente manera: recubrimos la traza de γ por discos abiertos contenidos en Ω y, usando la compacidad de la traza, escogemos un subrecubrimiento finito de la misma por discos abiertos. Uniendo esos discos con D_{int} (que tiene intersección no vacía con cada uno de ellos), se obtiene un dominio contenido en Ω y simplemente conexo que, a su vez, contiene a $\overline{D_{\text{int}}} = D_{\text{int}} \cup \{\gamma\}$. (Esta afirmación requiere un razonamiento más detallado y el uso de algunos ejercicios de Topología pero no daremos más detalles aquí.) Por tanto, el segundo enunciado se puede deducir del primero.

Veamos ahora cómo se prueba el primer enunciado. Éste se sigue fácilmente del Teorema de Green, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En efecto, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = u + iv$, entonces f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en Ω. Además, sabemos de la última entrega de apuntes que f es derivable infinitas veces. Tal y como ya comentamos en la solución del Ejercicio 1, esto significa que es de clase C^1 en Ω. (Este detalle es muy importante porque, cuando se elige otro método para demostrar el teorema, el principal escollo consiste en probar este hecho antes de saber que holomorfía implica analiticidad.) Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Green, empezando por la misma cuenta que en una de las entregas anteriores de los apuntes y en el Ejercicio 1 y obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy + v\,dx \\ &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 + i\cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Las aplicaciones del Teorema integral de Cauchy en la práctica suelen ser fáciles. Una vez fijada la función f, lo importante es elegir correctamente el dominio Ω. Ilustraremos esto con algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1. *Si γ es el rectángulo con los vértices i, 0, 4 y $4+i$, entonces $\int_\gamma e^{-3z^2+12}\,dz = 0$. La justificación es simple: la función $f(z) = e^{-3z^2+12}$ es analítica en todo el plano (entera), así que podemos tomar $\Omega = \mathbb{C}$, un dominio simplemente conexo. Obviamente, γ es suave a trozos, simple y cerrada (recomendamos escribir una parametrización como ejercicio) y $\{\gamma\} \subset \Omega$.*

Obsérvese que normalmente tenemos la flexibilidad de reducir el dominio Ω si nos conviene; lo importante es que el contorno γ esté contenido en él. En el ejemplo anterior, nos hubiera valido en lugar de $\Omega = \mathbb{C}$ tomar como Ω, el disco $D(0,7)$ o cualquier otro disco o rectángulo abierto que contuviese al rectángulo indicado.

Ejercicio 2. *Calcule la siguiente integral, justificando la respuesta: $\int_{|z-i|=1} \dfrac{dz}{z^2+9}$.*

SOLUCIÓN. En este caso la orientación de la curva, que es la circunferencia de centro i y radio 1, va a ser irrelevante ya que la integral será igual a cero. En efecto, la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$ es holomorfa en todos los puntos del plano salvo en los ceros del denominador, que son $\pm 3i$.

Podemos escoger el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \operatorname{Im} z < \frac{5}{2}\}$, que es simplemente conexo (al ser una banda horizontal abierta), contiene a la circunfencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\}$ y, además, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, así que el resultado de integración es cero en virtud del Teorema integral de Cauchy.

Ejercicio 3. *Sea* $\gamma = C(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$ *con cualquier orientación. Calcule* $\int_\gamma \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\, dz$.

SOLUCIÓN. Obsérvese que $g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ ya no es analítica en todo el plano porque el denominador se anula en los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Es un ejercicio sencillo pero instructivo demostrar que ésos son los únicos ceros en todo el plano, usando la definición de la función seno a través de la función exponencial. De hecho, ya hemos visto ejercicios análogos en los apuntes sobre las series y funciones elementales y en las hojas de problemas.

Escojamos, por tanto, un dominio reducido, por ejemplo, $\Omega = D(2; \frac{10}{9}) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < \frac{10}{9}\}$. Este disco es simplemente conexo y no contiene a ninguno de los puntos z_n (la comprobación para $z_1 = \pi$ requiere un poco de cálculo mientras que para el resto de los puntos z_n esto es bastante obvio). Por tanto, g es holomorfa en Ω) y contiene a la curva γ. Aplicando el teorema de Cauchy, se deduce que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\, dz = 0. \qquad \blacksquare$$

Los últimos ejercicios nos muestran claramente cómo razonar en el segundo ejercicio de la hoja 7.

Generalizaciones del teorema de Cauchy

Veremos que, en un dominio simplemente conexo, la integral de línea de una función analítica (holomorfa) a lo largo de cualquier curva cerrada (no necesariamente simple) es nula.

Existen varias generalizaciones del teorema de Cauchy. Aquí formularemos una de ellas. En la literatura se pueden encontrar versiones aún más generales del teorema que, según las hipótesis topológicas, pueden constituir una versión homotópica u homológica del resultado. Es importante notar que no se pide que la curva sea simple y que, debido a ello, la demostración de este resultado requiere bastante trabajo. Usaremos esta versión general en lo que queda del curso pero no daremos una demostración completa.

Teorema 3 *(Teorema integral de Cauchy, versión general). Sea* Ω *un dominio simplemente conexo en el plano,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* γ *una curva cerrada y* C^1 *a trozos cuya traza está contenida en* Ω. *Entonces* $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Nos limitaremos a abordar sólo dos casos especiales.

Caso de los polinomios. Parametrizando la curva como $z = \gamma(t)$, $a \le t \le b$, escribiendo $dz = \gamma'(t)\, dt$ como antes y teniendo en cuenta que $\gamma(a) = \gamma(b)$, al tratarse de una curva cerrada, por el Teorema fundamental del cálculo (adaptado a las funciones complejas de una variable real) vemos que

$$\int_\gamma (z-c)^n\, dz = \int_a^b (\gamma(t)-c)^n \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \left(\frac{1}{n+1}(\gamma(t)-c)^{n+1}\right)' dt = \frac{1}{n+1}(\gamma(t)-c)^{n+1}\Big|_a^b = 0,$$

para $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$. (Más adelante, cuando hablemos del índice de una curva, veremos que esto es falso para $n = -1$.) Una vez que hayamos visto la teoría de la función primitiva, se notará que aquí, en el fondo, hemos usado el hecho elemental de que la función z^n tiene primitiva (obvia) en todo el plano.

Si $f = P$, un polinomio, recordando del álgebra que todo polinomio puede escribirse como $P(z) = Q(z-c)$, donde Q es otro polinomio que tiene el mismo grado, se seguirá por la linealidad de la integral de línea que

$$\int_\gamma P(z)\, dz = \int_\gamma Q(z-c)\, dz = 0.$$

Caso local. Nos referimos al caso de una curva suave a trozos y cerrada (no necesariamente simple) cuya traza está contenida en un disco $D(c;R) \subset \Omega$, donde $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Sabemos de la entrega anterior que f puede desarrollarse en serie de potencias centrada en c y convergente en $D(c;R)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n .$$

Dicha serie converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $D(c;R)$ y, en particular, en $\{\gamma\}$. Por un teorema visto en los apuntes sobre las integrales de línea, podemos integrar la serie de f término a término, obteniendo

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-c)^n\, dz = 0\,,$$

debido a la comprobación ya hecha para los polinomios. ■

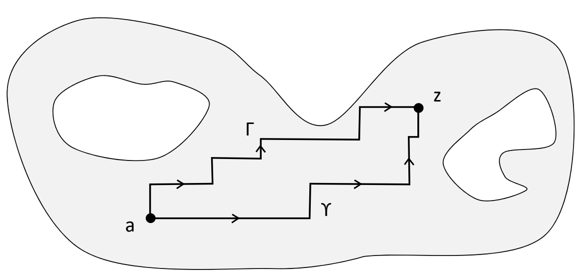
Observación. Es importante notar que la prueba es mucho más difícil en el caso de una curva cuya traza no está contenida solamente en un disco de Ω. No daremos ninguna demostración de este caso general. Una forma de abordar esta dificultad, integrando sobre los caminos poligonales con los lados paralelos a los ejes, puede consultarse en los apuntes del Prof. A. Sánchez-Calle pero es imporante advertir un detalle sutil.

En la última página de sus apuntes, la indicación al lado del dibujo con dos línes poligonales que se cruzan: "al superponer las dos poligonales se obtienen rectángulos a los que se les puede aplicar el apartado anterior" es sólo una indicación esquemática que no pretende ser una prueba detallada (por muy obvia que parezca intuitivamente la afirmación). Una demostración rigurosa de este hecho, a partir de los axiomas de geometría euclídea de David Hilbert (usando, por ejemplo, inducción transfinita y varias herramientas geométricas) llenaría probablemente varias páginas. En otras palabras, no existe ninguna forma de trivializar este resultado: todas las demostraciones exigen un trabajo arduo.

En palabras de algunos matemáticos sabios: al igual que la energía potencial que corresponde a una cierta altura es constante, la dificultad del trabajo que se exige para probar un mismo teorema de distintas maneras también debe ser la misma (no se puede probar algo importante haciendo sólo unas pocas manipulaciones fáciles o triviales).

Función primitiva de una función holomorfa

Dando por hecho la versión general del Teorema 3 de Cauchy: *para una función holomorfa en un dominio simplemente conexo, su integral a lo largo de cualquier contorno contenido en el dominio, es nula*, se deduce fácilmente que la integral de la función holomorfa desde un punto hasta otro no depende del camino elegido. Por ejemplo, el siguiente dibujo ilustra este hecho para dos caminos poligonales desde el punto a hasta el punto z. Obsérvese que el dominio allí representado no es simplemente conexo (tiene dos "agujeros") pero, debido a la versión alternativa que tenemos del Teorema de Cauchy, sabemos que el resultado sigue siendo cierto mientras el contorno no rodee a ninguno de los agujeros (componentes del complementario de Ω).



Este hecho nos permite definir correctamente la función primitiva de una función holomorfa.

Teorema 4 *(Existencia de la función primitiva). Sea Ω un dominio simplemente conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Entonces existe una función $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. La continuidad de f (que se sigue de su diferenciabilidad compleja) garantiza la existencia de las integrales de la función sobre cualquier curva cerrada y suave a trozos. Fijemos un punto $a \in \Omega$, como en el dibujo anterior (pero recordando que esta vez tenemos la hipótesis de que Ω es simplemente conexo). Si $z \in \Omega$ es cualquier otro punto y γ y Γ son dos curvas suaves a trozos desde a hasta z, entonces $\gamma + \Gamma^-$ es una curva cerrada y C^1 a trozos (que empieza y termina en a). Por el Teorema integral de Cauchy (caso general), se sigue que

$$0 = \int_{\gamma+\Gamma^-} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\Gamma^-} f(z)\,dz$$

y, por tanto, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$, por las propiedades básicas de las integrales de línea. Conclusión: la integral de línea desde a hasta z no depende de la elección de la curva suave a trozos y podemos escribir $\int_a^z f(w)\,dw$ para denotar a cualquiera de ellas, ya que todas tienen el mismo valor. Esto nos permite definir la función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$F(z) = \int_a^z f(w)\,dw, \qquad z \in \Omega.$$

Aún queda por comprobar que la función definida de esa manera, en efecto, tiene derivada compleja y que ésta es precisamente la función inicial. La tarea se reduce a comprobar que

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{z+h} f(w)\,dw - \int_a^z f(w)\,dw}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_z^{z+h} f(w)\,dw}{h} = f(z).$$

Para justificar la penúltima igualdad, sirven los razonamientos mencionados en las observaciones a continuación de la prueba (uniendo los caminos de a a z y de z a $z+h$).

La comprobación final del límite es análoga a la que se hace para segmentos horizontales en los apuntes de Sánchez-Calle pero es más general. Puesto que la integral $\int_z^{z+h} f(w)\,dw$ no depende del camino (suave a trozos) desde z hasta $z+h$, sin pérdida de generalidad podemos tomar el segmento $[z, z+h]$ como camino. Puesto que su longitud es precisamente $\ell([z,z+h]) = |(z+h)-z| = |h|$, teniendo en cuenta la estimación básica para las integrales de línea de una entrega anterior de apuntes:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\int_z^{z+h} f(w)\,dw}{h} - f(z) \right| &= \frac{\left|\int_z^{z+h} f(w)\,dw - f(z)h\right|}{|h|} = \frac{\left|\int_z^{z+h} f(w)\,dw - f(z)\int_z^{z+h} dw\right|}{|h|} \\
&= \frac{\left|\int_z^{z+h} (f(w)-f(z))\,dw\right|}{|h|} \le \frac{\ell([z,z+h]) \cdot \max_{[z,z+h]} |f(w)-f(z)|}{|h|} \\
&= \max_{[z,z+h]} |f(w)-f(z)| \to 0, \qquad h \to 0,
\end{aligned}$$

debido a la continuidad de f en el punto z. ■

Definición. La función F del Teorema 4 se denomina la *función primitiva* de f en Ω.

Observaciones. (1) En la demostración dada arriba, a primera vista parece que sólo usamos la continuidad de f pero no es asi. La independencia de la integral del camino es fundamental ya que se ha usado dos veces en la prueba. Las funciones continuas no necesariamente tienen esta propiedad. Por tanto, la hipótesis de que f sea holomorfa es fundamental.

(2) Como en el cálculo, no existe sólo una función primitiva de f. No obstante, la primitiva de una función holomorfa fija es única salvo un sumando constante (y por eso con frecuencia diremos *la primitiva*): si F_1 y F_2 son dos primitivas de la misma función holomorfa f, entonces $F = F_1 - F_2$ es holomorfa en Ω y satisface la condición

$$F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

en Ω y, debido a un resultado conocido, F es constante. En otras palabras, si F_1 es una primitiva de F, toda primitiva es de la forma $F = F_1 + C$ para una constante compleja C.

(3) La primitiva obviamente depende de la elección del "punto base" a. Si cambiamos el punto inicial del camino de integración de a a otro punto $b \in \Omega$, la primitiva variará en un sumando, ya que

$$F(z) = \int_a^z f(w)\,dw = \int_a^b f(w)\,dw + \int_b^z f(w)\,dw = F(b) + F_1(z)\,.$$

(4) Finalmente, si como punto base para definir la primitiva tomamos un punto $c \in \Omega$ y $a, b \in \Omega$ son otros dos puntos y sumamos dos caminos, uno desde c hasta a y otro desde a hasta b para obtener un camino desde c hasta b, se sigue que

$$F(b) = \int_c^b f(z)\,dz = \int_c^a f(z)\,dz + \int_a^b f(z)\,dz = F(a) + \int_a^b f(z)\,dz$$

y, por tanto, obtenemos la *versión compleja del Teorema fundamental del cálculo*:

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a)\,.$$

Al igual que en Cálculo, podemos interpretar que la constante C se cancela en la identidad anterior, así que la integral desde a hasta b no depende de la primitiva F elegida, es decir, no depende del punto base c elegido.

Ejercicio 4. *Sea γ una curva C^1 a trozos desde el origen hasta el punto π. Calcule la integral*

$$\int_\gamma \cos z\,dz\,.$$

SOLUCIÓN. De las propiedades básicas de las funciones trigonométricas estudiadas antes sabes que tanto el coseno como el seno son funciones enteras y $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, $F(z) = \operatorname{sen} z$ es la primitiva de $f(z) = \cos z$, salvo una constante que se le puede sumar (es decir, todas las primitivas son de la forma $F_C(z) = \operatorname{sen} z + C$, con $C \in \mathbb{C}$). Según la versión compleja del Teorema fundamental del cálculo, se sigue que

$$\int_\gamma \cos z\,dz = \int_{[0,\pi]} \cos z\,dz = F(\pi) - F(0) = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 5. *Sea γ una curva C^1 a trozos desde el punto 1 hasta el punto i, con la traza contenida en el semiplano superior abierto (salvo el punto inicial 1). Calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}\,.$$

SOLUCIÓN. Realmente no sabemos casi nada de γ (podría ser un arco de circunferencia o algo muchísimo más complicado) pero sabemos lo suficiente. Según las condiciones del problema, la traza $\{\gamma\}$ forma parte del dominio simplemente conexo $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, donde podemos definir el logaritmo como función holomorfa, mediante la fórmula habitual:

$$\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

También sabemos de los apuntes sobre los logaritmos que su derivada en el dominio indicado es $(\log z)' = \frac{1}{z}$. En otras palabras, la función logaritmo es la primitiva de $\frac{1}{z}$ (salvo un sumando constante). Por ejemplo, eligiendo como punto base $a = i/2$, cualquier primitiva tendrá la forma

$$F(z) = \int_{i/2}^{z} \frac{1}{w}\, dw = \log z + C,$$

para cierta constante $C \in \mathbb{C}$. Entonces podemos calcular la integral a lo largo de nuestra curva γ desconocida (pero con traza contenida en un dominio donde la primitiva está definida, que es el semiplano superior), obteniendo de la versión compleja del Teorema fundamental del cálculo (y de la determinación elegida del logaritmo):

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = F(i) - F(1) = \log i - \log 1 = \log i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2} i. \qquad \blacksquare$$

Obviamente, el Ejercicio 4 y el Ejercicio 5 nos ayudarán con el cuarto problema de la hoja 7.

Un recíproco del teorema de Cauchy

Resulta que el recíproco del teorema de Cauchy es cierto, siempre bajo la hipótesis natural de continuidad (para poder integrar a lo largo de una curva suave a trozos). De hecho, no hace falta exigir que la integral a lo largo de cada contorno sea cero. Basta con pedirlo para los triángulos. Con un triángulo nos referimos a la curva cerrada y simple, suave a trozos formada por tres segmentos, orientados de forma natural: $[a, b] + [b, c] + [c, a]$, donde a, b y c son tres puntos distintos en el plano.

El teorema que enunciamos a continuación se debe al matemático italiano Giacinto Morera (1856-1909). Conviene notar que los triángulos en el enunciado se pueden sustituir por rectángulos o por circunferencias, aunque es más fácil trabajar con rectángulos y triángulos.

Teorema 5 *(Morera). Sea Ω un dominio en el plano y f una función continua en Ω. Si para todo triángulo T contenido en Ω junto con su interior se tiene $\int_T f(z)\, dz = 0$, entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.*

Enunciado equivalente: Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano y f una función continua en Ω. Si para todo triángulo T contenido en Ω se tiene $\int_T f(z)\, dz = 0$, entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Daremos sólo una indicación. Ya hemos comentado la equivalencia entre los dos enunciados en otros resultados. Aquí se procedería de forma totalmente análoga para verificarla.

Para ver que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, basta ver que es holomorfa en cada disco $D(a; R)$ contenido en Ω. En un disco así podemos definir la primitiva de f mediante la fórmula $F(z) = \int_a^z f(w)\, dw$. (La continuidad de f garantiza la existencia de las integrales de la función sobre cualquier contorno y, en particular, sobre cualquier segmento y triángulo.) La clave de la hipótesis sobre los triángulos consiste en lo siguiente: considerando el triángulo T con los vértices a, z y $z + h$ contenido en $D(a; R)$. Entonces

$$0 = \int_T f(w)\, dw = \int_a^z f(w)\, dw + \int_z^{z+h} f(w)\, dw + \int_{z+h}^{a} f(w)\, dw = F(z) + \int_z^{z+h} f(w)\, dw - F(z+h),$$

con lo cual obtenemos $\int_z^{z+h} f(w)\,dw = F(z+h) - F(z)$ y podemos razonar como en la demostración del Teorema 4, aplicando razonamientos completamente análogos para probar que $F' = f$ en $D(a;R)$. ■

Como acabamos de ver, el Teorema integral de Cauchy no era un simple capricho de los matemáticos del siglo XIX por descubrir nuevas curiosidades. Gracias a los teoremas de Cauchy y de Morera, ahora sabemos que podemos caracterizar las funciones analíticas de entre todas las funciones continuas en un dominio simplemente conexo, como aquellas cuyas integrales sobre todos los triángulos se anulan.

Fórmula integral de Cauchy: versiones más generales

Conviene comentar que tanto el teorema integral de Cauchy como la fórmula integral de Cauchy admiten dos versiones equivalentes. En una de ellas, el dominio es simplemente conexo y el contorno es arbitrario. En la otra, el dominio es arbitrario pero el contorno tiene que estar contenido en él junto con su dominio interior. (Véase el enunciado del Teorema 2.)

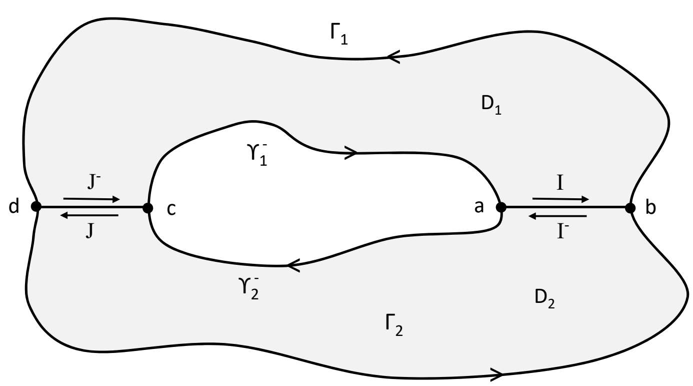
Sea Ω un dominio en el plano acotado por dos contornos, Γ y γ, de manera que la traza de γ esté contenido en el dominio interior a Γ. Tal y como ya hicimos en los cursos de cálculo, orientaremos la frontera $\partial\Omega$ de manera que, al recorrerla en el sentido que dicta su parametrización, el dominio nos quede siempre a la izquierda; eso significa darle al contorno Γ la orientación positiva y a γ, la negativa: γ^-.

Dominios acotados por dos contornos disjuntos. El procedimiento empleado en la demostración del siguiente resultado es bastante frecuente en Análisis complejo y conviene recordarlo.

Proposición 1. *Sean γ y Γ dos contornos tales que $\overline{D_{\text{int}}(\gamma)} = D_{\text{int}}(\gamma) \cup \{\gamma\} \subset D_{\text{int}}(\Gamma)$ (geométricamente, Γ "rodea" a la curva γ y a su dominio interior) y sea D el dominio acotado por ambas curvas γ y Γ. Sean Γ y γ ambas orientadas positivamente. Si Ω es un dominio tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Demostración. No daremos ninguna demostración rigurosa pero es fácil ver que podemos "cortar D en dos trozos", uniendo un punto de $\{\gamma\}$ con otro en $\{\Gamma\}$ mediante un segmento $I = [a,b]$, $a \in \{\gamma\}$, $b \in \{\Gamma\}$, por ejemplo, eligiendo $a \in \{\gamma\}$ y $b \in \{\Gamma\}$ tal que $|a-b| = \text{dist}(a, \{\Gamma\})$. Con eso se asegurará de que ningún punto interior del intervalo I tiene intersecciones con ninguna de las dos curvas. (Por supuesto, existen otras formas de elegir los segmentos I y J pero la elección indicada aquí es una opción segura.) De manera análoga, podemos unir otro punto en γ con otro en Γ mediante un segmento $J = [c,d]$, $c \in \{\gamma\}$, $d \in \{\Gamma\}$ y de manera que $I \cap J = \emptyset$. En general, los intervalos I y J no están necesariamente contenidos en la misma recta, como parece quedar reflejado en el dibujo (es decir, su posición puede ser más general).



Si denotamos como $I^- = [b,a]$ y $J^- = [d,c]$ a los mismos segmentos pero con orientación opuesta (como curvas recorridas en el sentido contrario) y por Γ_1, Γ_2 a los dos arcos que componen la curva Γ y que unen b con d y por γ_1, γ_2 a los dos arcos que componen la curva γ y que unen a con c, obtendremos dos nuevos contornos:

$$C_1 = I \cup \Gamma_1 \cup J^- \cup \gamma_1^-, \qquad C_2 = I^- \cup \gamma_2 \cup J^- \cup \Gamma_1.$$

Estos dos contornos, por el Teorema de Jordan (mencionado en apuntes anteriores) acotan dos dominios simplemente conexos, D_1 y D_2, respectivamente. A ambos contornos se les puede aplicar el Teorema 2 para obtener

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0 = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Por tanto,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0.$$

Escribiendo ambas integrales como sumas de integrales a lo largo de diferentes trozos y observando que las integrales a lo largo de I e I^- se cancelan y lo mismo para J e J^-.

$$0 = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz,$$

lo cual implica la conclusión deseada. ■

Fórmula integral de Cauchy: versión para contornos. En los apuntes anteriores, demostramos la Fórmula integral de Cauchy para circunferencias. Ahora veremos que el resultado sigue siendo válido para contornos arbitrarios.

Teorema 6 *(Fórmula integral de Cauchy para contornos). Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y Γ un contorno con orientación positiva tal que tanto su traza como el dominio interior acotado por ella están contenidos en Ω. Entonces*

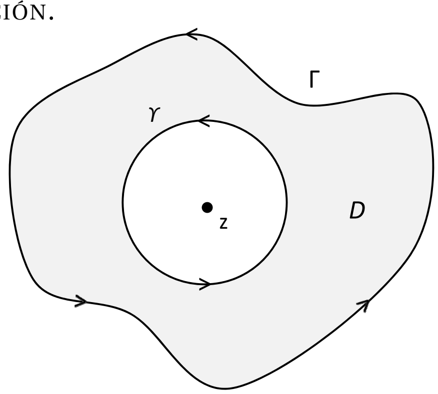
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z), \tag{1}$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

Asimismo, se tiene la fórmula para las derivadas de orden n:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw.$$

DEMOSTRACIÓN.



Sea $z \in D_{\text{int}}(\Gamma)$ un punto arbitrario. Entonces existe $r > 0$ tal que $\overline{D}(z;r) \subset D_{\text{int}}(\Gamma)$. Si llamamos γ a la circunferencia de radio r centrada en z, es inmediato que estamos en condiciones de aplicar la Proposición 1 a la función $g(w) = f(w)/(w-z)$, que es holomorfa en todos los puntos w del dominio D acotado por las curvas γ y Γ (nótese que $z \notin D$). Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\,,$$

donde la primera igualdad se sigue de la Proposición 1 y la segunda de la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias (vista en la entrega anterior de los apuntes).

Puesto que antes ya habíamos demostrado la fórmula para las derivadas calculadas *en el centro* de la circunferencia γ, aplicando la Proposición 1 a la función $g(w) = f(w)/(w-z)^{n+1}$, también obtenemos la fórmula

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = f^{(n)}(z)\,. \qquad \blacksquare$$

En el caso particular cuando f es la función constante uno, obtenemos la siguiente consecuencia del Teorema 6.

Corolario 1. *Sea Ω un dominio en el plano y Γ un contorno con orientación positiva tal que tanto su traza como el dominio interior acotado por ella están contenidos en Ω. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 1\,,$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

Índice de una curva respecto de un punto

Sea Γ un contorno que encierra una región $D_{\text{int}}(\Gamma)$ y z un punto tal que $z \notin \overline{D_{\text{int}}(\Gamma)} = D_{\text{int}}(\Gamma) \cup \{\Gamma\}$. Puesto que $\operatorname{dist}(z, \overline{D_{\text{int}}(\Gamma)}) > 0$, existe un dominio Ω tal que $\overline{D_{\text{int}}(\Gamma)} \subset \Omega$ y $z \notin \Omega$. Por tanto, $f(w) = 1/(w-z)$ es holomorfa como función de la variable w en Ω (puesto que el denominador no se anula). Según el Teorema integral de Cauchy, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 0\,.$$

Junto con el Corolario 1, esta observación nos dice que, si $z \notin \{\Gamma\}$ y Γ tiene orientación positiva, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in D_{\text{int}}(\Gamma) \\ 0, & \text{si } z \in D_{\text{ext}}(\Gamma) \end{cases}\,.$$

Obsérvese que, geométricamente, en el primer caso la curva Γ da una vuelta alrededor de z y en el segundo no da ninguna vuelta alrededor de dicho punto. El valor $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw$ se suele llamar el *ìndice* del punto z respecto de la curva Γ. Puede definirse en situaciones mucho más generales, donde no se pide que Γ sea una curva simple. Veamos el resultado pertinente.

Teorema 7. *Sea γ una curva suave a trozos y cerrada (no necesariamente simple). Entonces para todo $z \notin \{\gamma\}$, el número*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw$$

es entero.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos parametrizar γ de manera que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Puesto que γ es C^1 a trozos, tenemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds.$$

Si definimos la función $F : [0,1] \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$F(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds,$$

obviamente, se cumple

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = \int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw.$$

Además, por el Teorema fundamental del cálculo,

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\left((\gamma(t)-z)e^{-F(t)}\right) = \gamma'(t)e^{-F(t)} - F'(t)(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = \gamma'(t)e^{-F(t)} - \gamma'(t)e^{-F(t)} = 0.$$

Se sigue que la función $(\gamma(t)-z)e^{-F(t)}$ es constante y, por tanto, por un lado:

$$(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = (\gamma(0)-z)e^{-F(0)} = \gamma(0)-z = \gamma(1)-z$$

(al ser la curva cerrada, se cumple $\gamma(1) = \gamma(0)$) y también

$$(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = (\gamma(1)-z)e^{-F(1)} = (\gamma(1)-z)e^{-F(1)}.$$

Se sigue que $(\gamma(1)-z)e^{-F(1)} = (\gamma(1)-z)$. Puesto que $z \notin \{\gamma\}$, es imposible que $\gamma(1)-z = 0$, luego $e^{-F(1)} = 1$, así que (¡por fin llegamos a usar esos ejercicios con la exponencial y el logaritmo en una demostración!) $-F(1) = 2\pi i m$, para cierto $m \in \mathbb{Z}$. Escribiendo $k = -m$, vemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = F(1) = 2\pi i k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

y el resultado queda demostrado. ■

Definición. El índice de una curva γ, cerrada y suave a trozos, respecto de un punto $z \notin \{\gamma\}$ es el número entero

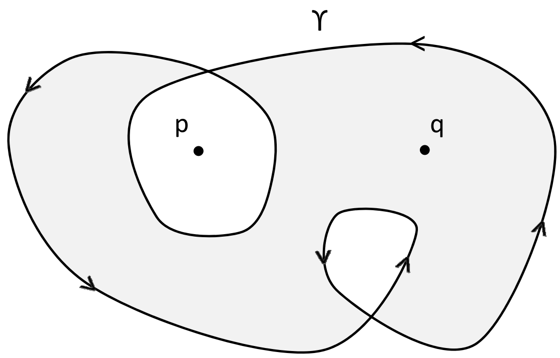
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw.$$

Observaciones. (1) Es obvio que el índice es negativo para las curvas simples orientadas negativamente, debido a las propiedades básicas de la integral de línea (al revertir la orientación, se produce un cambio de signo).

(2) El significado geométrico del índice es el número de vueltas que da la curva γ alrededor del punto z. No daremos ninguna justificación formal de este hecho que, por otra parte, es claro de los casos de curvas simples,

cerradas y suaves a trozos y también se puede ver si parametrizamos una circunferencia recorrida n veces y calculamos el índice respecto de su centro directamente.b

Para una curva cerrada y suave a trozos pero no simple, a diferencia de un contorno, no es aplicable el teorema de Jordan. Por ejemplo, en la figura abajo es fácil apreciar que no podemos hablar de un dominio interior y otro exterior a la curva γ representada allí. Basta fijarse en cualquiera de las dos regiones acotadas y en blanco (sin sombrear) que no se pueden considerar ni una cosa ni la otra.



Ejemplo 2. *Para los puntos p y q indicados en la figura de arriba, es obvio que γ da dos vueltas alrededor de p y sólo una alrededor de q. Por tanto,* $\operatorname{Ind}_\gamma(p) = 2$, $\operatorname{Ind}_\gamma(q) = 1$, *lo cual nos dice que*

$$\int_\Gamma \frac{1}{w-p}\,dw = 4\pi i\,, \qquad \int_\Gamma \frac{1}{w-q}\,dw = 2\pi i\,,$$

sin la necesidad de de conocer la parametrización de γ ni realizar ningún cálculo.

El Ejemplo 2 nos ayudará a resolver el tercer problema de la hoja 7, una vez representada gráficamente la curva e identificados los puntos de interés.

El gran teorema acerca de los dominios simplemente conexos

Tal vez ya sepamos de Topología (o de nuestras clases presenciales) que un dominio (abierto y conexo) Ω en el plano es simplemente conexo si y sólo si Ω es homeomorfo al disco unidad, $\mathbb{D}$, si y sólo si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es conexo en $\hat{\mathbb{C}}$. Se trata de caracterizaciones topológicas de los dominios simplemente conexos de entre todos los dominios planos. Una vez vistos los conceptos desarrollados en esta entrega, podemos enunciar el siguiente resultado que nos proporciona diferentes caracterizaciones de tales dominios en términos de conceptos de Variable Compleja. Pueden añadirse más apartados pero no lo haremos aquí.

Teorema 8 *(Gran teorema acerca de los dominios simplemente conexos). Sea Ω un dominio en el plano. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) Ω *es simplemente conexo;*

(b) Para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para todo contorno γ en Ω, se cumple la condición $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$;

(c) Para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ existe una función primitiva en Ω;

(d) Para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω existe un logaritmo en Ω, es decir, una función $L \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f = e^L$ en Ω;

(e) Para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω existe una raíz en Ω, es decir, una función $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f = g^2$ en Ω.

DEMOSTRACIÓN. No daremos una demostración completa de este resultado, sólo algunas implicaciones.

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Es el contenido de los teoremas de Cauchy y de Morera.

(a) $\Rightarrow$ (c): Es el contenido del Teorema 4.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sea Ω un dominio simplemente conexo, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y supongamos que f no se anula en Ω. Fijemos un punto $a \in \Omega$. Todo punto $z \in \Omega$ puede conectarse con a mediante una curva C^1 a trozos (por ejemplo, una línea poligonal con los lados paralelos a los ejes). Puesto que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, la función $f'/f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y, dado que Ω es simplemente conexo, podemos definir la función primitiva de f'/f mediante la fórmula

$$L(z) = \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw\,,$$

tomando la integral a lo largo de cualquier curva γ suave a trozos desde a hasta z. Por el Teorema 4, se cumple $L' = f'/f$, es decir, $f' = L'f$ en Ω.

Definiendo $g = e^{-L}f$ como en una entrega anterior de apuntes, vemos que es una función holomorfa en Ω y cumple $g' = -L'e^{-L}f + e^{-L}f' = e^{-L}(f' - L'f) = 0$ en Ω. Por el teorema visto antes ya citado varias veces, $g = e^{-L}f$ es constante en Ω y, por tanto, $L = \log f + C$, como en los apuntes anteriores. Puesto que $L \in \mathscr{H}(\Omega)$, lo mismo se sigue para $\log f$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Sabiendo que existe $L \in \mathscr{H}(\Omega)$ como en el apartado (d), podemos definir $g = e^{L/2} \in \mathscr{H}(\Omega)$, obteniendo $g^2 = e^L = f$. ∎

¿Por qué la exposición en estos apuntes es diferente de la de otros textos?

Podría decirse que los teoremas de Cauchy -la fórmula integral y el teorema integral- son el corazón de la variable compleja pues de ellos se deducirán otros muchos resultados que veremos al final del curso. Además, puede observarse de cualquier texto que presente demostraciones completas de unas versiones suficientemente generales de esos resultados que eso suele llevar mucho tiempo y esfuerzo. Este año hemos elegido otro camino para llegar a los teoremas de Cauchy, cambiando el orden más frecuente y evitando varios resultados auxiliares. ¿Dónde están las diferencias principales en las formas de abordar este tema entre las distintas fuentes?

Existen numerosos textos de Variable Compleja y en distintos idiomas. La mayoría de los autores de dichos textos suele demostrar primero alguna versión suficientemente general del Teorema integral de Cauchy para deducir a continuación la Fórmula integral de Cauchy. Al hacer eso, se observa que en un principio sólo se sabe que una función holomorfa tiene derivada pero así no se tiene el hecho (nada trivial) de que tiene derivada continua. Eso significa que, a la hora de aplicar la Fórmula de Green se necesitan hipótesis adicionales y, por tanto, se require mucho trabajo adicional para demostrar el Teorema integral de Cauchy. El teorema es fácil para una circunferencia, como ya hemos comprobado, pero es muy difícil incluso para un rectángulo o un triángulo (siendo esos dos casos bastante parecidos). De eso trata una primera versión del teorema de Cauchy. La prueba dada por Goursat (dividiendo, de forma sucesiva, el rectángulo o triángulo en cuatro más pequeños que lo componen para deducir una contradicción) es muy instructiva para cualquiera que se quiera iniciar en los secretos del análisis matemático.

¿Cómo hemos conseguido llegar al mismo sitio evitando ese gran esfuerzo? Lo hemos logrado haciendo otro esfuerzo serio, esencialmente equivalente, usando la idea ingeniosa del autor desconocido con la regla de Leibniz y la fuerza bruta del cálculo, deduciendo primero la forma más sencilla de la Fórmula integral de Cauchy (para circunferencias). Eso nos ha permitido demostrar que holomorfía implica analiticidad y que, en particular, toda función holomorfa tiene derivada continua. Y eso es lo que ha hecho que el uso del teorema de Green pareciera casi trivial y nos ha posibilitado unas aplicaciones adicionales para deducir el Teorema integral de Cauchy para los contornos arbitrarios.

Preparado por José Pedro Moreno y Dragan Vukotić, profesores de la asignatura en 2019-20