Variable Compleja I (CURSO **2019-20**, **Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Fórmula integral de Cauchy. Holomorfía y analiticidad y otras aplicaciones

El uso de las integrales de línea es fundamental en Variable compleja porque nos permite formular dos de sus teoremas centrales. Uno de ellos es la fórmula integral de Cauchy, que nos mostrará cómo calcular el valor de una función holomorfa si conocemos sólo los valores que toma en una curva cerrada (típicamente suave a trozos). El otro es el teorema integral de Cauchy, según el cual la integral de una función holomorfa a lo largo de una curva cerrada (y, de nuevo, suave a trozos) será igual a cero, siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones topológicas relativas a la función y a la curva en cuestión. Como ya veremos más adelante, existen diferentes versiones de ambos teoremas.

Estos dos resultados tienen implicaciones de enorme importancia en el campo de Variable compleja. Por ejemplo, nos ayudarán a calcular numerosas integrales, incluidas varias integrales impropias vistas en otros cursos y que podrían ser complicadas de evaluar por métodos elementales. También nos permitirán deducir numerosos teoremas cualitativos acerca del comportamiento de las funciones holomorfas que serán de nuevo unos fenómenos típicos de variable compleja, sin análogo en otros contextos en Análisis matemático.

Incluso la versión más simple de la fórmula integral de Cauchy, formulada para las circunferencias, nos bastará en esta entrega de apuntes para deducir un resultado fundamental que ya anticipamos en clase: toda función holomorfa es analítica. Dicho de manera más precisa, puede escribirse como serie de potencias en cada disco contenido en el dominio donde la función es holomorfa. Una vez fijado el centro, veremos que esa serie (de Taylor) es única. Esto tendrá varias consecuencias importantes como las llamadas estimaciones de Cauchy para las funciones enteras, de las que es un caso especial el teorema de Liouville. Dichas estimaciones nos ayudan a entender mejor cómo pueden crecer las funciones enteras y qué imágenes pueden tener.

Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias

Motivación de la fórmula integral de Cauchy. Uno de los ejercicios de las hojas nos dice que, si f es una función compleja, continua en el disco abierto $D(a;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$, $0 < \varepsilon < R$ y C_ε es la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \varepsilon\}$, orientada positivamente (por ejemplo, parametrizada como $C_\varepsilon(t) = c + \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$) entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)\,.$$

Si en lugar de suponer la continuidad de f suponemos que es holomorfa en $D(a;R)$, resultará que, de hecho,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)\,,$$

para todo ε con $0 < \varepsilon < R$, una afirmación mucho más fuerte. Esta igualdad constituye un caso especial de la fórmula integral de Cauchy. Veremos en breve que la afirmación sigue siendo cierta para cualquier otro punto a en el interior de la circunferencia C_ε en lugar del centro. Después veremos incluso que la circunferencia se puede sustituir por cualquier otra curva simple y cerrada γ en cuyo interior se encuentra el punto a. Finalmente, veremos que el resultado sigue siendo cierto para cualquier dominio simplemente conexo en lugar del disco $D(a;R)$, siempre y cuando la curva γ esté contenida en el dominio junto con su dominio interior (para la definición del dominio interior a una curva de Jordan, véase la parte final de la entrega anterior de los apuntes). Por supuesto, cuanto más general sea la afirmación, más difícil será demostrarla y habrá más consideraciones topológicas a tener en cuenta.

Procede hacer un comentario técnico. Como en otras muchas situaciones en Análisis, con frecuencia cambiamos la letra usada para la variable de integración, de manera que también escribiremos, por ejemplo,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-a}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\,d\zeta\,.$$

Cuando se quiere hacer énfasis en el hecho de que el punto a no es fijo sino que nos interesa variarlo en el interior de la circunferencia para tener una función de z, también escribiremos la fórmula como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Cambios de notación de este tipo también serán frecuentes en estos apuntes, según nos convenga.

Observaciones sobre los discos contenidos en un dominio. Recordemos que un dominio es un conjunto abierto y conexo en el plano. Algunas de las letras más habituales para denotar un dominio son Ω y D. Un teorema visto en clase afirma que cada dominio en el plano es conexo por líneas poligonales con todos los lados paralelos a alguno de los ejes (es decir, todos horizontales o verticales).

En todo este capítulo debemos tener presentes algunas consideraciones métrico-geométricas muy sencillas que detallamos a continuación. Recordemos que la distancia de un punto z a un conjunto A en el plano se define como

$$\operatorname{dist}(z,A) = \inf\{|z-w| : w \in A\}\,.$$

Obviamente, el valor de $\operatorname{dist}(z,A)$ es no negativo. Si $A = \emptyset$, entendemos que $\operatorname{dist}(z,A) = +\infty$. Si $A \neq \emptyset$, entonces la distancia es finita: si $w_0 \in A$, entonces $\operatorname{dist}(z,A) \le |z-w_0|$, por la definición del ínfimo.

Proposición 1. *Si $A \neq \emptyset$ es un conjunto cerrado, el ínfimo* $\operatorname{dist}(z,A)$ *se alcanza para todo $z \in \mathbb{C}$:*

$$\operatorname{dist}(z,A) = \min\{|z-w| : w \in A\}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, de la definición del ínfimo se deduce que existe una sucesión $(w_n)_{n=1}^\infty$ en A tal que la sucesión numérica $(|z-w_n|)_{n=1}^\infty$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty}|z-w_n| = \operatorname{dist}(z,A)$. De ahí se sigue que la sucesión compleja $(z-w_n)_{n=1}^\infty$ es acotada y, por tanto, también lo es $(w_n)_{n=1}^\infty$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $(w_{n_k})_{k=1}^\infty$ que converge a un punto w cuando $k\to\infty$. Puesto que A es cerrado, por hipótesis, $w \in A$. Entonces

$$|z-w| = \lim_{k\to\infty}|z-w_{n_k}| = \lim_{n\to\infty}|z-w_n| = \operatorname{dist}(z,A)\,,$$

así que el ínfimo se alcanza, al menos, en el punto $w \in A$. (Podría alcanzarse en varios puntos; conviene buscar ejemplos concretos.) ■

Proposición 2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $\Omega \neq \emptyset$, un punto $z \in \Omega$ y un número $r > 0$. Entonces el disco abierto $D(z;r) \subset \Omega$ si y sólo si $r \le \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$*.

DEMOSTRACIÓN. Cuando $\Omega = \mathbb{C}$, entonces $\partial\Omega = \emptyset$ y $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) = +\infty$, así que no hay nada que demostrar (para todo radio $r > 0$ y finito, $D(z;r) \subset \Omega$ mientras que, formalmente, entendemos que $D(z;+\infty) = \mathbb{C}$).

Cuando $\Omega \neq \emptyset$ es un dominio distinto del plano, su borde (frontera) $\partial\Omega$ es un conjunto cerrado y no vacío. Por tanto, $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ es un número finito y se alcanza, según la Proposición 1. Además, el número $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ es estrictamente positivo porque Ω, por ser abierto, contiene un disco centrado en z y de radio positivo, digamos δ, luego $\text{dist}(z, \partial\Omega) \geq \delta > 0$). Es inmediato que $D(z;R) \subset \Omega$ y, por tanto, para todo r con $0 < r \leq R$ tenemos que $D(z;r) \subset \Omega$, mientras que, para $\rho > R$, es imposible que $D(z;\rho) \subset \Omega$, por la definición de la distancia. ■

La Proposición 2 será importante tanto a la hora de desarrollar una función holomorfa en serie en ciertos discos en un dominio como para tener claro para qué circunferencias tiene sentido formular la versión básica de la fórmula integral de Cauchy que daremos a continuación.

A estas alturas ya debería ser obvio que, dado un punto z en un dominio $\Omega/$, una cirfunferencia centrada en z y de radio $r > 0$ está contenida en Ω (equivalentemente, $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\} \subset \Omega$) si y sólo si $\text{dist}(z, \partial\Omega) > r$.

Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias. Para deducir el primer resultado importante de este capítulo, usaremos la regla de Leibniz para la diferenciación dentro del signo de la integral para una integral con parámetro.

Lema 1 *(Regla de Leibniz). Sea* $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ *una función continua,* $-\infty < a < b < +\infty$, $-\infty < c < d < +\infty$.

(a) Si la función $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ *viene dada por* $g(t) = \int_a^b \varphi(s,t)\, ds$, *entonces* $g \in C[c,d]$.

(b) Si, además, la derivada parcial $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ *existe y es continua en* $[a,b] \times [c,d]$, *entonces* $g \in C^1[c,d]$ *y*

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial t}\, ds, \qquad \forall t \in [c,d].$$

No daremos ninguna demostración de esta regla, puesto que se suele probar en Teoría de la medida para funciones con valores reales y que la versión compleja se sigue inmediatamente escribiendo $\varphi = u + vi$ y aplicando la versión real a las partes real e imaginaria por separado.

Cuando el integrando de una integral de línea no es necesariamente holomorfo pero es una fracción con denominador lineal, con frecuencia es útil el siguiente importante resultado, que es la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy. Entre otras cosas, la fórmula nos dice lo siquiente: dada una función holomorfa en un disco, basta conocer sus valores sólo en una circunferencia dentro del disco para recuperar los valores de la función en cualquier punto dentro de dicha circunferencia.

Recomendación. Como veremos, incluso la demostración de esta versión sencilla de la fórmula es no trivial ya que es algo técnica y larga aunque instructiva. En una primera lectura de estos apuntes, se puede omitir la demostración, centrándose en el enunciado y en las aplicaciones.

Teorema 1 *(Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias). Sea* Ω *un dominio en el plano,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $c \in \Omega$, $r > 0$ *tal que* $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\} \subset \Omega$ *y sea* $C = \{z : |z-c| = r\}$ *la circunferencia de radio* r, *centrada en el punto* c *y con orientación positiva. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z), \tag{1}$$

para todo $z \in D(c;r)$.

DEMOSTRACIÓN. Dividiremos la demostración en dos pasos principales.

(1) Demostraremos primero el caso especial cuando $f \equiv 1$ en Ω, deduciendo la fórmula

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w-z}\, dw = 1. \tag{2}$$

Incluso este caso requiere cierto trabajo cuando $z \neq c$, siendo el caso $z = c$ un ejercicio rutinario usando la definición de la integral de línea. Veamos el caso de z arbitrario. Puesto que $|z-c| < r$, que es lo mismo que

$|\frac{z-c}{r}| < 1$, existe ζ con $|\zeta| = 1$ tal que $\frac{z-c}{r} = \zeta$. Por tanto, $z = c + r\zeta$. Parametrizando la circunferencia como sigue: $w = c + re^{is}$, con $0 \le s \le 2\pi$, para $w \in C$, el lado izquierdo de la fórmula (2) se convierte en

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{is}}{(c+re^{is})-(c+r\zeta)}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-\zeta}\,ds,$$

así que nuestra tarea se reduce a comprobar que la última integral es igual a uno. Para ello, recurriremos al siguiente procedimiento. Definamos la siguiente función de dos variables reales, muy similar al integrando:

$$\varphi(s,t) = \frac{e^{is}}{e^{is}-t\zeta}, \qquad 0 \le s \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 1,$$

así como la función

$$g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-t\zeta}\,ds, \qquad 0 \le s \le 2\pi.$$

Es inmediato que $\varphi \in C([0,2\pi]\times[0,1])$ puesto que el numerador y el denominador son ambos funciones continuas y el denominador no se anula, debido a la desigualdad triangular inversa:

$$|e^{is} - t\zeta| \ge |e^{is}| - |t\zeta| = 1 - t|\zeta| \ge 1 - |\zeta| > 0.$$

Un cálculo directo (usando la regla de la cadena) muestra que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{e^{is}\zeta}{(e^{is}-t\zeta)^2}, \qquad 0 \le s \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 1.$$

Es claro que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \in C([0,2\pi]\times[0,1])$, por las razones ya mencionadas arriba. Debido al Lema 1, $g \in C^1[0,1]$ y

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}\zeta}{(e^{is}-t\zeta)^2}\,ds, \qquad 0 \le s \le 2\pi,$$

Si, para $t \in [0,1]$ arbitrario pero fijo, consideramos la función

$$\Phi(s) = \frac{i\zeta}{e^{is}-t\zeta}, \qquad 0 \le s \le 2\pi,$$

vemos inmediatamente que

$$\Phi'(s) = \frac{e^{is}\zeta}{(e^{is}-t\zeta)^2}, \qquad 0 \le s \le 2\pi.$$

Por el Teorema fundamental del Cálculo y la fórmula para g' de arriba, se sigue que

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \Phi'(s)\,ds = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = \frac{i\zeta}{1-t\zeta} - \frac{i\zeta}{1-t\zeta} = 0,$$

así que la función g es constante. Puesto que, trivialmente, $g(0) = \int_0^{2\pi} ds = 2\pi$, se sigue que también

$$2\pi = g(1) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-\zeta}\,ds, \tag{3}$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar. El caso especial queda probado.

(2) En el caso general, aplicaremos un procedimiento muy similar pero en un momento de la prueba usaremos el caso especial ya probado. De nuevo, escribiremos $z = c + r\zeta$, para cierto ζ con $|\zeta| < 1$. También parametrizaremos la circunferencia C como antes: $w = c + re^{is}$, con $0 \le s \le 2\pi$, para $w \in C$. El lado izquierdo de (1) se convierte en

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+re^{is})}{(c+re^{is})-(c+r\zeta)}\,ire^{is}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+re^{is})e^{is}}{e^{is}-\zeta}\,ds.$$

Por tanto, hemos de demostrar que

$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{f(c+re^{is})e^{is}}{e^{is}-\zeta}\, ds, \tag{4}$$

Esto sugiere que consideremos la siguiente función de dos variables reales:

$$\varphi(s,t) = \frac{f\left(c+r\zeta+tr(e^{is}-\zeta)\right)e^{is}}{e^{is}-\zeta}, \qquad 0 \le s \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 1,$$

y la función asociada

$$g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)\, ds, \qquad 0 \le s \le 2\pi.$$

Primero, tenemos que comprobar que tiene sentido evaluar f en el punto $c+re^{is}+tr(e^{is}-\zeta)$. De la desigualdad

$$|(c+r\zeta+tr(e^{is}-\zeta)-c| = r|\zeta+t(e^{is}-\zeta)| = r|te^{is}+(1-t)\zeta| \le r\,(t+(1-t)|\zeta|) < r(t+(1-t)) = r,$$

se desprende que $c+re^{is}+tr(e^{is}-\zeta \in D(c;r)$ y, por tanto, podemos evaluar f en dicho punto.

De nuevo, la desigualdad triangular inversa nos ayuda a ver que $\varphi \in C([0,2\pi]\times[0,1])$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \in C([0,2\pi]\times[0,1])$.

Ahora, usando de nuevo el Lema 1, concluimos que $g \in C^1[0,1]$ y

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{r(e^{is}-\zeta)f'\left(c+r\zeta+tr(e^{is}-\zeta)\right)e^{is}}{e^{is}-\zeta} ds = \int_0^{2\pi} rf'\Big(c+r\zeta+tr(e^{is}-\zeta)\Big)e^{is}\, ds,$$

Si ahora definimos

$$\Phi(s) = \frac{-i}{t} f\Big(c+r\zeta+tr(e^{is}-\zeta)\Big), \qquad 0 \le s \le 2\pi,$$

para t fijo y $\neq 0$, se sigue que

$$\Phi'(s) = rf'\Big(c+r\zeta+tr(e^{is}-\zeta)\Big)e^{is}, \qquad 0 \le s \le 2\pi,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_0^{2\pi} rf'\Big(c+r\zeta+tr(e^{is}-\zeta)\Big)e^{is}\, ds = \int_0^{2\pi} \Phi'(s)\, ds = \Phi(2\pi)-\Phi(0) \\ &= \frac{-i}{t} f\,(c+r\zeta+tr(1-\zeta)) + \frac{i}{t} f\,(c+r\zeta+tr(1-\zeta)) = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que g es constante y puesto que

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,0)\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{f\,(c+r\zeta)\,e^{is}}{e^{is}-\zeta}\, ds = f\,(c+r\zeta)\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-\zeta}\, ds = 2\pi f\,(c+r\zeta) = 2\pi f(z),$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado el caso especial (1) demostrado antes, en concreto, la fórmula (3). Finalmente, dado que g es constante, obtenemos que también

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(c+re^{is})e^{is}}{e^{is}-\zeta}\, ds = \int_0^{2\pi} \varphi(s,1)\, ds = g(1) = g(0) = 2\pi f(z),$$

lo cual demuestra la igualdad deseada (4) y completa la prueba del teorema. ■

Por supuesto, muchas veces escribiremos la fórmula (1) en el Teorema 1 en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a), \qquad a \in D(c;r),$$

con las variables cambiadas, sobre todo cuando la integral de línea ya venga escrita con la variable de integración z. Veremos ahora algunos ejemplos del uso de esta versión básica de la Fórmula integral de Cauchy.

Ejemplo 1. *Sea γ la circunferencia unidad, orientada positivamente. Denotemos por γ^- a la misma circunferencia pero con orientación negativa. Entonces*

$$\int_{\gamma^-} \frac{\cos(\pi z)}{z+\frac{1}{3}}\, dz = -\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z-(-\frac{1}{3})}\, dz = -2\pi i \cdot \cos(-\frac{\pi}{3}) = -\pi i\,.$$

La primera igualdad es consecuencia directa de la fórmula para el cambio de orientación vista en los apuntes sobre integrales de línea. La segunda se obtiene aplicando la Fórmula integral de Cauchy al punto $a = -\frac{1}{3}$ situado en el interior de la circunferencia unidad, a la función $f(z) = \cos z$, que es holomorfa en todo el plano (entera) y a cualquier dominio que contenga al disco unidad cerrado; por ejemplo, podemos elegir tanto $\Omega = D(0;R)$ con $R > 1$ como $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > -2\}$, entre otros. La tercera igualdad se tiene porque, como ya sabemos, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Veamos ahora un ejercicio aparentemente más complicado pero, de hecho, sencillo.

Ejercicio 1. *Para la misma circunferencia γ que en el Ejemplo 1 (con orientación positiva), calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-3z}\, dz\,.$$

SOLUCIÓN. El denominador $z^2-3z = z(z-3)$ se anula en dos puntos: en $z=0$ y en $z=3$ pero sólo uno de ellos, $z=0$, está en el dominio interior a la circunferencia γ, que es el disco unidad $\mathbb{D}$. Por tanto, debemos definir $f(z) = \frac{\cos z}{z-3}$ para tener el integrando escrito en una forma conveniente para la aplicación de la Fórmula integral de Cauchy (en este caso, con $c=0$):

$$\frac{\cos z}{z^2-3z} = \frac{f(z)}{z}\,.$$

Para poder aplicar el teorema, necesitamos además un dominio Ω que cumpla dos condiciones a la vez: que f sea holomorfa en Ω (por tanto, $3 \notin \Omega$ será necesario) y que el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \gamma \subset \Omega$. Podemos elegir, por ejemplo, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 2\}$. Por la Fórmula Integral de Cauchy, obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-3z}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i\, f(0) = -\frac{2\pi i}{3}\,. \qquad \blacksquare$$

El siguiente ejercicio requiere algo de trabajo técnico adicional.

Ejercicio 2. *Sea γ es la circunferencia unidad $\{z : |z| = 1\}$ con orientación positiva. Evalúe la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{2\, dz}{4z^2-1}\,,$$

usando la fórmula integral de Cauchy.

SOLUCIÓN. En este caso, el denominador se anula en dos puntos diferentes: $z = 1/2$ y $z = -1/2$ y ambos están dentro de la circunferencia unidad. Por tanto, aunque es muy fácil factorizar el denominador:

$$\frac{2}{4z^2-1} = \frac{2}{(2z-1)(2z+1)}\,,$$

no podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy directamente, ni a la función $f(z) = \frac{2}{2z+1}$ ni a $f(z) = \frac{2}{2z-1}$, porque ninguna de ellas es holomorfa en ningún disco que contenga a la circunferencia γ. El problema está en que la primera no es holomorfa en $z = -1/2$, mientras que la segunda no lo es en $z = 1/2$. Entonces, ¿cómo podemos aplicar la fórmula de Cauchy? Podemos hacerlo después de un paso previo, que consiste en descomponer la función f en fracciones simples, aplicando luego la fórmula integral de Cauchy a cada una de ellas por separado. Empezamos escribiendo

$$f(z)=\frac{2}{(2z-1)(2z+1)}=\frac{A}{2z-1}+\frac{B}{2z+1}.$$

De aquí se obtiene

$$2=(2z+1)A+(2z-1)B=(2A+2B)z+(A-B).$$

Por tanto, tenemos

$$A+B=0, \qquad A-B=2.$$

Resolviendo este sistema lineal (muy fácil), obtenemos que $A=1$, $B=-1$ y, por tanto,

$$f(z)=\frac{1}{2z-1}-\frac{1}{2z+1},$$

lo cual nos será más cómodo escribir como

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1/2}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1/2}$$

para poder aplicar la fórmula integral de Cauchy. Recordemos que se necesita una función de la forma $z-a$ en el denominador. Observando que tanto el punto $z=1/2$ como $z=-1/2$ se encuentran en el interior de γ, ya podemos calcular directamente:

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1}\,dz=\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-1/2}\,dz-\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+1/2}\,dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=0,$$

donde cada integral se ha calculado por separado, aplicando la Fórmula integral de Cauchy a la función constante $f\equiv 1$ en el numerador. ■

En una de las siguientes entregas de los apuntes, resolveremos este mismo problema usando el llamado Teorema de los residuos.

Holomorfía y analiticidad

Recordemos que una función f es holomorfa en un dominio Ω si tiene derivada $f'(z)$ en todos los puntos z de Ω. Seguiremos usando la notación $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ para expresar que la función f es holomorfa en Ω.

Como es habitual en Análisis Matemático, una función se denomina analítica en Ω si en cada disco $D(c,r)$ contenido en Ω se puede escribir como serie de potencias: $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n$ (en este caso, una serie compleja). Recordemos que, debido a la Proposición 2, se cumple que $D(c,r)\subset\Omega$ si y sólo si $r\le \operatorname{dist}(c,\partial\Omega)$. Sabemos de clase que una serie de potencias se puede derivar tantas veces cuantas se quiera, obteniendo cada vez otra serie de potencias convergente en el mismo disco. Por lo tanto, toda función analítica en un disco es también holomorfa en el mismo disco.

Holomorfía implica analiticidad. Aparentemente, la propiedad de ser analítica es mucho más fuerte que la propiedad de ser holomorfa. No obstante, ahora ya hemos llegado a uno de los puntos centrales de este curso donde veremos que toda función holomorfa en Ω es, de hecho, analítica en cualquier disco contenido en Ω. Por lo tanto, los dos conceptos, analítica y holomorfa, son equivalentes, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea Ω un dominio en el plano, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $c\in\Omega$ un punto tal que* $\operatorname{dist}(c,\partial\Omega)=R$. *Entonces f es puede escribir como función analítica en el disco $D(c;R)$. En otras palabras, puede desarrollarse en serie de potencias centrada en c y convergente en $D(c;R)$:*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n ,$$

siendo

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,dw$$

para $0<r<R$ *y* C_r *la circunferencia centrada en* c*, de radio* r *y con orientación positiva (por ejemplo, parametrizada como* $C_r(t)=c+re^{it}$*,* $0\le t\le 2\pi$*).*

En particular, una función holomorfa tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto de Ω*, siendo*

$$f^{(n)}(c)=n!\,a_n, \qquad \forall c\in\Omega, \quad \forall n\ge 0 .$$

Además, se tiene la siguiente fórmula integral de Cauchy para la derivada n*-ésima de la función* f *en el punto* c*:*

$$f^{(n)}(c)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,dw, \qquad \forall n\ge 0. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $0<r<R$. Entonces, por hipótesis, $\overline{D}(c;r)\subset D(c;R)\subset\Omega$. Por el Teorema 1, sabemos que

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

para todo $z\in D(c;r)$. Consideremos un valor fijo ρ tal que $0<\rho<r$. Veamos que ocurre cuando $|z-c|\le\rho$. Puesto que entonces $|z-c|\le\rho<r=|w-c|$ para todo $x\in C_r$, obtenemos que $\left|\frac{z-c}{w-c}\right|\le\frac{\rho}{|w-c|}=\frac{\rho}{r}<1$ y, por tanto,

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-c)-(z-c)}=\frac{1}{w-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-c}{w-c}}=\frac{1}{w-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}} .$$

La serie converge uniformemente en $\overline{D}(c;\rho)$, al ser geométrica con $\left|\frac{z-c}{w-c}\right|\le\frac{\rho}{r}<1$. Finalmente, obtenemos

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\,dw=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,dw\cdot(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n ,$$

para todo $z\in\overline{D}(c;\rho)$, siendo

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,dw .$$

El intercambio de la integral y la serie está justificado por el último corolario de los apuntes sobre las integrales de línea complejas, debido a la convergencia uniforme. El desarrollo es válido para $|z-c|\le\rho$ con $\rho<r$ y, por tanto, tenemos convergencia absoluta de la serie de potencias en todo el disco $D(c;r)$. Puesto que esto es cierto para todo $r\in(0,R)$, la serie de potencias obtenida converge en todo $D(c;R)$. Por supuesto, la fórmula para a_n es válida sólo cuando $0<r<R$.

Es importante observar que a_n no depende de z ya que esta variable no interviene en la integral que nos da el valor de a_n. Por el teorema de una entrega anterior de apuntes que nos dice que una serie de potencias se puede derivar término a término, sabemos que, de hecho, $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y, por tanto, para un $c\in\Omega$ dado, el coeficiente a_n es único para cada $n\ge 0$. ■

Observación. Es evidente que si se tiene el desarrollo en serie de potencias de radio R como en el teorema, el mismo desarrollo es válido en cualquier disco de radio menor centrado en el mismo punto.

Definición. Con frecuencia llamaremos a la serie obtenida serie de Taylor de la función f centrada en c. También, a partir de ahora, usaremos los términos función holomorfa y función analítica indistintamente, puesto que la equivalencia entre estos conceptos ha quedado justificada.

La fórmula integral de Cauchy para las derivadas. El Teorema 2 nos permite recuperar el valor de la derivada de cualquier orden en el centro de una circunferencia a partir de los valores de la función en dicha circunferencia. Veamos un ejemplo concreto.

Ejercicio 3. *Si γ denota a la circunferencia unidad con orientación positiva, calcule la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\, dz.$$

SOLUCIÓN. No podemos aplicar directamente la fórmula integral de Cauchy a la función $f(z) = \cos z/z$ en ningún disco que contenga al disco unidad cerrado. El problema está en que el punto $c = 0$ pertenece al interior de la circunferencia γ pero f no es holomorfa en $c = 0$. Sin embargo, podemos usar la fórmula integral de Cauchy para la derivada de la función $g(z) = \cos z$, que sí es holomorfa en todo el plano:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z^2}\, dz = g'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0,$$

siendo $n = 1$ y $a = 0$ en la fórmula para la derivada n-ésima en la fórmula integral de Cauchy. ■

Es importante entender en relación con los resultados demostrados hasta ahora nos permiten lo siguiente:

- evaluar una función holomorfa en cualquier punto interior a una circunferencia, a partir de sus valores en dicha circunferencia (Teorema 1);

- evaluar la derivada (de cualquier orden) de la función, a partir de los mismos datos, pero sólo en el centro de la circunferencia (según el Teorema 2, fórmula (5).

No obstante, la fórmula para la derivada se puede extender a los demás puntos interiores a la circunferencia en cuestión aunque demostrar eso exige un esfuerzo adicional. De momento, sólo daremos el enunciado, dejando la demostración para la siguiente entrega de los apuntes.

Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $c \in \Omega$ un punto tal que $\operatorname{dist}(c, \partial\Omega) = R$. *Si $0 < r < R$ y C_r denota a la circunferencia centrada en c, de radio r y con orientación positiva, entonces*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw, \qquad \forall z \in D(c;r), \quad \forall n \geq 0.$$

Veamos un ejemplo del uso de esta versión más general de la fórmula de Cauchy para las derivadas.

Ejercicio 4. *Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ y γ la circunferencia unidad (centrada en el origen) con orientación positiva y sea $n \in \mathbb{N}$ (un número natural). Supongamos que f es una función analítica en el disco D y que cumple la igualdad*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}\, dz = 0,$$

Calcule razonadamente el valor de $f'\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

SOLUCIÓN. Usando álgebra elemental, la condición

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}\, dz = \frac{1}{(n+1)^2}\int_\gamma \frac{f(z)}{\left(z-\frac{1}{n+1}\right)^2}\, dz$$

implica que

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{\left(z-\frac{1}{n+1}\right)^2}\, dz = 0.$$

Se cumplen las condiciones para aplicar la Fórmula integral de Cauchy para la derivada:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = f'(a)\,, \qquad a\in\mathbb{D}\,.$$

En este caso, $a=\dfrac{1}{n+1}\in\mathbb{D}$ ya que $\left|\dfrac{1}{n+1}\right|<1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Esto significa que $f'\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$. ■

Unicidad de la serie de Taylor. Tal y como nos muestra el Teorema 2, debido a la fórmula $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, los coeficientes de la serie de Taylor (con el centro c prescrito) de una función analítica f son únicos. Usaremos este hecho con frecuencia para sacar conclusiones adicionales. Lo ilustramos mediante varios ejemplos.

En una entrega anterior de los apuntes hemos definido la función logaritmo en ciertos dominios simplemente conexos (el plano menos una semirrecta) y hemos calculado su derivada. Para conocer mejor la función, debemos desarrollarla también en serie de potencias. Como ya sabemos, el desarrollo será distinto para cada punto c que elijamos. A continuación daremos un ejemplo de cómo se puede obtener el desarrollo para $c=0$.

Ejercicio 5. *Desarrolle en serie de potencias centrada en el origen la función* $f(z)=\log(1+z)$, *indicando el disco de convergencia.*

SOLUCIÓN. Para poder definir la función logaritmo como función holomorfa (analítica), necesitamos hacer un corte en el plano, excluyendo, por ejemplo, los valores reales no positivos. Por tanto, se ha de cumplir la condición $1+z\neq x$, para todo $x\in\mathbb{R}$, $x\le 0$, lo cual es equivalente a $z\neq x$, $x\le -1$. (Elegiremos la determinación principal de manera que $\log 1=0$.) Por tanto, tomamos como dominio de definición

$$\Omega=\mathbb{C}\setminus\{z=x\in\mathbb{R}: x\le -1\}\,,$$

el plano menos el semieje $(-\infty,-1]$ del eje real. El disco más grande centrado en el origen contenido en Ω es, obviamente, el disco unidad, ya que la distancia del origen al borde de Ω es uno. Por tanto, podemos desarrollar f en serie de potencias de z (serie de Taylor) convergente en el disco unidad.

Calculamos ahora los coeficientes de la serie de Taylor, calculando las sucesivas derivadas de f:

$$f'(z)=\frac{1}{1+z}\,,\quad f''(z)=-\frac{1}{(1+z)^2}\,,\quad f'''(z)=\frac{2}{(1+z)^3}\,,\quad f^{(4)}(z)=-\frac{3!}{(1+z)^4}\,,\quad \dots$$

Inductivamente, obtenemos la fórmula

$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n}\,, \qquad n\ge 1\,.$$

Por tanto, $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, para $n\ge 1$, así que los coeficientes de Taylor son:

$$a_0=0\,,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,, \qquad n\ge 1\,,$$

y el desarrollo en serie (que generaliza la fórmula conocida de Cálculo I) es

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots\,, \qquad |z|<1\,. \qquad ■$$

La unicidad del desarrollo en serie de Taylor también nos ayuda a determinar las funciones analíticas en ciertos discos (o en todo el plano) que cumplan ciertas condiciones, es decir, que sean soluciones de cierta ecuación funcional. Daremos un par de ejemplos. Tanto en las hojas de problemas como en los exámenes de los años anteriores encontraremos problemas de este tipo.

Ejercicio 6. *Encuentre razonadamente todas las funciones enteras f que satisfagan la ecuación funcional*

$$f(2z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

SOLUCIÓN. Por el teorema que dice que la holomorfía implica la analiticidad, sabemos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, una serie de potencias convergente en todo el plano. Si f cumple la ecuación indicada, entonces (por una proposición vista antes sobre la suma de dos series de potencias)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n z^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} a_n z^n$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Por la unicidad de los coeficientes de Taylor, se sigue que para todo $n \geq 0$ tenemos

$$2^n a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} a_n .$$

Por tanto, si algún $a_n \neq 0$, se obtiene

$$2^n = \frac{1+(-1)^n}{2},$$

pero esto es imposible cuando $n \geq 1$ ya que entonces

$$\frac{1+(-1)^n}{2} \leq \frac{1+1}{2} < 2 \leq 2^n .$$

Se sigue que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$, así que sólo el coeficiente a_0 puede ser no nulo, lo cual implica que $f \equiv cte$.

Es fácil comprobar que toda función constante efectivamente cumple la ecuación dada. Por tanto, las constantes son las únicas soluciones. ■

El desarrollo en serie de Taylor nos permite resolver ecuaciones funcionales también para otras funciones que no sean enteras.

Ejercicio 7. *Halle todas las funciones $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ que satisfagan la condición $f(z) = f(z^2)$, para todo $z \in \mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. Puesto que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, podemos escribir f como una serie de potencias convergente en $\mathbb{D}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

La condición $f(z) = f(z^2)$ nos dice que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + + a_5 z^5 + a_6 z^6 + \ldots = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + + a_3 z^6 + a_4 z^8 + \ldots$$

Teniendo en cuenta la unicidad de la serie de Taylor y comparando los coeficientes a ambos lados de la última igualdad, se deduce que

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0, \qquad a_2 = a_1 ,\ a_4 = a_2 ,\ a_6 = a_3 ,\ a_8 = a_4 , \ldots$$

y, por tanto, $a_k = 0$ para todo $k \geq 1$, luego $f \equiv cte$.

Recíprocamente, es evidente que todas las funcions constantes son analíticas en el disco unidad, así que todas cumplen las condiciones del problema. ■

Más adelante, veremos que este ejercicio admite una solución alternativa (basada en el Principio de los ceros aislados).

Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

Como es habitual, usaremos la notación $[\alpha]$ para denotar la *parte entera* de α, es decir, el único número entero n tal que $n \le \alpha < n+1$. Por ejemplo, $[\pi] = 3$ y $[-\sqrt{3}] = -2$.

Nota. En Informática, la función $a \mapsto [a]$ se suele llamar la *función suelo*) y se denota como $\lfloor a \rfloor$.

Antes ya vimos que las funciones enteras como la exponencial y el coseno no están acotadas. Veremos ahora que estas funciones no son ninguna excepción. Uno de los resultados importantes de este curso, el teorema de Liouville, nos enseñará que si una función entera está acotada, entonces es necesariamente constante. Obtendremos el teorema de Liouville como un caso especial del siguiente resultado, conocido como las estimaciones de Cauchy y relacionado con el crecimiento de los polinomios.

Es fácil ver (y ya lo hicimos antes en clase) cómo crece un polinomio cuando $z \to \infty$.

Proposición 3. *Sea P un polinomio de grado n. Entonces existen $R > 0$ y $M > 0$ tales que $|P(z)| \le M|z|^n$ para todo z tal que $|z| \ge R$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la desigualdad triangular. Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0$ y $a_n \ne 0$. Tomemos $R = 1$ y

$$C = \text{máx}\{|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}.$$

Si $|z| \ge R = 1$, es inmediato que $|z|^n \ge |z|^{n-1} \ge \dots \ge |z| \ge 1$ y entonces

$$|P(z)| \le |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0| \le C|z|^n + C|z|^n + \dots + C|z|^n + C|z|^n = (n+1)C|z|^n,$$

así que basta elegir $M = (n+1)C$. ■

Las estimaciones de Cauchy formuladas abajo son, esencialmente, un recíproco de la Proposición 3 pues nos dicen que una función entera no puede crecer de la misma forma que un polinomio sin ser un polinomio. Estas estimaciones son una consecuencia directa de la fórmula integral de Cauchy, aplicada a una función entera.

Teorema 3 *(Estimaciones de Cauchy). Si f es una función entera y existen números $a > 0$, $M > 0$, $R > 0$ tales que $|f(z)| \le M|z|^\alpha$ para todo z con $|z| \ge R > 0$, entonces f es un polinomio de grado, como mucho, $[\alpha]$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que f es entera, por el Teorema 2 sabemos que se puede desarrollar en serie de potencias centrada en el origen: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, absolutamente convergente en todo el plano. Además,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

para cualquier $r > 0$. Por hipótesis, $|f(z)| \le M|z|^\alpha$ para todo z con $|z| \ge R > 0$. Elijamos $r > R$ y estimemos el valor de $|a_n|$. Teniendo en cuenta que en la circunferencia C_r se tiene $|w| = r > R$, podemos usar la hipótesis sobre el crecimiento de f para estimar el valor de $|f|$ en C_r, aplicando también la estimación para las integrales de línea (Proposición 6 de la anterior entrega de apuntes):

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{C_r} |f(w)||dw| \le \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} M r^\alpha \ell(C_r) = \frac{1}{2\pi} \frac{M r^\alpha}{r^{n+1}} 2\pi r = M r^{\alpha - n}.$$

Puesto que la misma estimación se obtiene para cualquier $r > R$, tomando el límite cuando $r \to +\infty$, vemos que $M r^{\alpha-n} \to 0$, para cada $n > \alpha$. Por tanto, $a_n = 0$ cuando $n > \alpha$ y la serie de Taylor de f se reduce al polinomio $f(z) = \sum_{n=0}^{[\alpha]} a_n z^n$, QED. ■

Ejercicio 8 *Si f es una función entera que satisface la desigualdad*

$$|f(z)| \le \frac{3104 \cdot |z|^{4,7}}{|z|^2+3}, \quad |z| \ge 1, \tag{6}$$

demuestre que sólo puede ser o una constante, o una función lineal o un polinomio cuadrático.

SOLUCIÓN. Observando que

$$\frac{|z|^2}{|z|^2+3} \le 1$$

para todo z, se sigue que

$$|f(z)| \le \frac{3104 \cdot |z|^{4,7}}{|z|^2+3} \le 3104\,|z|^{2,7}, \quad |z| \ge 1.$$

Por las estimaciones de Cauchy, concluimos que f es un polinomio de grado, como mucho, $[2,7] = 2$. Por tanto, f tiene la forma $f(z) = Az^2 + Bz + C$. ■

El caso $\alpha = 0$ en las estimaciones de Cauchy nos da el siguiente corolario inmediato.

Corolario 1 *(Teorema de Liouville). Toda función entera y acotada es constante.*

Observación. De hecho, es suficiente pedir que esté acotada en un entorno del infinito: $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ ya que la función continua $|f|$ está acotada en el disco compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$.

Ejercicio 9 *Identifique todas las funciones enteras que cumplan*

$$|f(z)| < |e^z| \qquad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C}.$$

SOLUCIÓN. Puesto que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, podemos definir la función $g(z) = f(z)/e^z$. Esta función es entera y satisface la condición $|g(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville, $g \equiv cte = \lambda$; es decir, $f(z) = \lambda e^z$. Además, por la desigualdad para g, se sigue que $|\lambda| < 1$.

Recíprocamente, para toda función de la forma $f(z) = \lambda e^z$ con $|\lambda| < 1$, tomando los módulos, se deduce que cumple la condición $|f(z)| < |e^z|$ para todo z. ■

Ejercicio 10 *Halle todas las funciones enteras con parte real positiva.*

SOLUCIÓN. Si f es entera, por la regla de la cadena también lo es e^{-f}. Recordando que $|e^{-f}| = e^{-\operatorname{Re} f} < 1$ y teniendo en cuenta nuestra hipótesis que $\operatorname{Re} f > 0$, concluimos por el Teorema de Liouville que e^{-f} es constante. Además, puesto que la exponencial no se anula, dicha constante debe ser no nula, digamos $e^{-f} \equiv A \neq 0$. Entonces la función $-f$ sólo puede tomar uno de los valores de $\log A$ que son una cantidad infinita numerable; es decir, $-f(z) = \ln A + 2\pi m i$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego (escribiendo $k = -m \in \mathbb{Z}$)

$$f(\mathbb{C}) = \{f(z) : z \in \mathbb{C}\} \subset \{-\ln A + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

¿Cuántos valores distintos de entre estos puede tomar f? Puesto que f es holomorfa, es continua; $\mathbb{C}$ es conexo, luego $f(\mathbb{C})$ es conexo (por un teorema visto en Topología). Se sigue que $f(\mathbb{C})$ no puede contener más de un punto del conjunto $\{-\ln A + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}$ y, por tanto, existe un $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = -\ln A + 2\pi k_0 i$ para todo z, así que f es una función constante. Además, debe tener parte real positiva: $\operatorname{Re} f = -\ln A > 0$ (y, por tanto, $A < 1$). Es decir, $f(z) = C + 2\pi k_0 i$, con $C > 0$ una constante y $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Recíprocamente, si $f(z) \equiv C + 2\pi k_0 i$, para ciertos números $k_0 \in \mathbb{Z}$ y $C > 0$, es obvio que $\operatorname{Re} f > 0$. ■

Acabaremos esta entrega de apuntes demostrando una consecuencia muy importante del teorema de Liouville: el Teorema fundamental del álgebra, que se suele atribuir a Gauss. Lo enunciamos en Conjuntos y Números pero allí no tuvimos suficientes herramientas para probarlo. El resultado admite varias demostraciones pero cualquier prueba requiere conocimientos de técnicas avanzadas. Algunas demostraciones usan conocimientos de Análisis y otras de Topología. De hecho, varios matemáticos ya conjeturaban este resultado en el siglo XVII y algunos los más célebres dieron demostraciones erróneas en el siglo XVIII. Una prueba dada por Gauss en 1799 contenía un fallo topológico no trivial, corregido unos 120 años después por Ostrowski. Conviene darse cuenta de que hasta el año 1900 no se habían definido ni siquiera los espacios métricos y mucho menos los topológicos. La primera demostración correcta fue encontrada en 1806 por Argand (cuyo nombre lleva en algunos textos el sistema de coordenadas complejas que usamos en esta asignatura); el mismo Gauss dio dos demostraciones más en la primera mitad del siglo XIX y hasta la fecha se han encontrado numerosas pruebas usando técnicas muy diferentes. La demostración posiblemente más sencilla conocida es la que encontró Charles Fefferman (uno de los ganadores de la Medalla Fields) mientras terminaba sus estudios de grado a finales de los años 1960. Su demostración usa sólo ciertas propiedades analíticas de los polinomios. Es especialmente llamativa la simplicidad de la demostración que presentamos abajo pero, obviamente, ésta se basa en ciertos conocimientos avanzados que hemos adquirido después de un par de meses de trabajo.

Teorema 4 *(Teorema fundamental del álgebra). Todo polinomio no constante tiene, al menos, una raíz compleja.*

DEMOSTRACIÓN. Sea P un polinomio no constante. Supongamos lo contrario: que no tenga ceros. Entonces podemos definir (en todo el plano) la función $f = 1/P$, que es entera por la regla del cociente.

Por un teorema demostrado en clase, $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. Entonces, por la definición del límite infinito en el infinito, existe $R > 0$ tal que $|P(z)| > 1$ para todo z con $|z| > R$. Por tanto, $|f(z)| < 1$, para todo z con $|z| > R$. Puesto que f es entera, por el Teorema de Liouville (véase la observación después del teorema) se sigue que f es constante. Luego también P es constante, lo cual es contrario a nuestra hipótesis inicial.

Finalmente, concluimos que P tiene que tener, al menos, un cero en el plano. ■

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20