Variable Compleja I **(CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Teorema de la función inversa. Las funciones logaritmo y potencias

Ya hemos definido varias funciones elementales que son enteras (es decir, holomorfas en todo el plano): los polinomios, la exponencial, las trigonométricas y las hiperbólicas. En este capítulo de los apuntes definiremos otras funciones holomorfas consideradas "elementales" pero cuya definición no va a ser tan automática ya que no van a ser enteras y, para definirlas, tendremos que hacer algo especial como, por ejemplo, restringir el dominio de definición de alguna manera. Veremos que, en cuanto consigamos que sean continuas, resultarán también ser holomorfas en los dominios de su definición. Nos referimos a la función logarítmica, a las raíces y otras potencias, así como a las funciones trigonométricas inversas.

El teorema de la función inversa nos mostrará cómo calcular la derivada de la función inversa de una función holomorfa en un dominio, en analogía con el teorema del mismo nombre visto en los cursos de Cálculo I (para las funciones de una variable real) y Análisis Matemático (para las funciones de varias variables reales). En particular, obtendremos las fórmulas para la derivada de la función raíz cuadrada (la inversa de la función $f(z) = z^2$) y de la función logaritmo (la inversa de la exponencial). Pero antes de llegar a ello, tenemos que recordar que la raíz de un número complejo no nulo no tiene un valor único y, como veremos, el logaritmo tendrá una cantidad infinita numerable de valores. El problema va a consistir en determinar cómo podemos definir esas funciones para que tengan valor único y sean, por ejemplo, continuas (una condición necesaria para que sean holomorfas). Veremos que el fondo del problema está en poder definir la función argumento (ya mencionada antes) como función continua. Es una función que no es holomorfa pero es fundamental en la definición de otras funciones elementales y holomorfas.

Logaritmos y potencias de números complejos

El logaritmo de un número complejo. En primer lugar, debemos definir el logaritmo de un número complejo. Parece razonable aceptar que $w = \log z$ si y sólo si $z = e^w$. Recordando que la función exponencial no se anula, el logaritmo sólo tendrá sentido para $z \neq 0$. Escribiendo

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \qquad w = x + yi,$$

vemos que $z = e^w$ es lo mismo que $e^x e^{yi} = re^{i\theta}$, lo cual es equivalente a $e^x = r$, $y - \theta = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es decir, a $x = \ln r$, $y = \theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, donde "ln" denota el logaritmo neperiano habitual de un número real y positivo. Finalmente, concluimos que el logaritmo de un número complejo $z \neq 0$ (expresado en forma polar) tiene una cantidad infinita (pero numerable) de valores y viene dado por la fórmula

$$\log z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + (\operatorname{Arg} z + 2\pi n)\, i, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

siendo $\arg z$ (como en clase) cualquiera de los posibles valores del argumento y $\operatorname{Arg} z$ el valor principal del argumento, elegido habitualmente en el intervalo $(-\pi, \pi]$ u otro convenientemente elegido. Hemos usado dos notaciones distintas, ln y log, para distinguir entre el logaritmo neperiando de un número positivo (valor único) y el conjunto (infinito numerable) de valores del logaritmo complejo.

Ejercicio 1 *Calcule todos los valores de* $\log(3i)$.

SOLUCIÓN. La forma polar de $3i$ es $3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$, así que, por la fórmula (1), obtenemos

$$\log(3i) = \ln 3 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) i = \ln 3 + \pi\left(2n + \frac{1}{2}\right) i, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Proposición. Para todo $z \neq 0$ y para cualquiera de los valores de $\log z$, se cumple la identidad

$$e^{\log z} = z.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la fórmula (1) y recordando que $e^{2\pi ni} = 1$, vemos que

$$e^{\log z} = e^{\ln|z| + (\operatorname{Arg} z + 2\pi n)i} = e^{\ln|z|} e^{(\operatorname{Arg} z + 2\pi n)i} = |z| e^{(\operatorname{Arg} z)i} \cdot e^{2\pi ni} = z \cdot 1 = z.$$

No nos debe sorprender que, para un $z \neq 0$ dado, su logaritmo tenga infinitos valores mientras que $e^{\log z}$ tenga sólo uno porque aquí ayuda la periodicidad de la función exponencial: $e^{2\pi ni} = 1$. $\blacksquare$

Las ecuaciones para las funciones como seno y coseno complejas también están estrechamente relacionadas con los valores del logaritmo, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 2 *Encuentre todas las soluciones complejas de la ecuación* $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN. En la entrega anterior de los apuntes ya hemos resuelto alguna ecuación similar. Ahora mostraremos otro método de solución, que involucra los logaritmos. Partimos de la definición del seno:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $2ie^{iz}$, de aquí obtenemos otra ecuación equivalente

$$e^{2iz} - 1 = ie^{iz}.$$

Escribiendo $w = e^{iz}$, la última igualdad se reduce a la ecuación cuadrática $w^2 - iw - 1 = 0$ cuyas soluciones son

$$w = \frac{i + \sqrt{3}}{2}, \qquad w = \frac{i - \sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, tenemos dos posibilidades:

$$e^{iz} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}, \qquad e^{iz} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

Finalmente, tomando logaritmos obtenemos

$$iz = \frac{\pi}{6} i + 2\pi ni, \qquad iz = \frac{5\pi}{6} i + 2\pi ni, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

es decir,

$$z = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \qquad z = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Las potencias complejas o de un número complejo. Recordemos del curso de Cálculo I que, para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ se tiene la fórmula

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{(\ln a)\cdot x}.$$

Por tanto, para a, $z \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ (necesario y suficiente para la existencia de $\log a$), parece razonable definir

$$a^z = e^{(\log a)\cdot z} = e^{(\ln|a| + i\arg a)\cdot z}, \tag{2}$$

donde hemos calculado los valores de $\log a$ según la definición (1). Por tanto, las potencias complejas también tienen infinitos valores.

Ejercicio 3 *Para $z \in \mathbb{C}$, calcule todos los valores de $(3i)^z$.*

SOLUCIÓN. Según la fórmula (2) y usando el resultado del Ejercicio (1), obtenemos

$$(3i)^z = e^{\log(3i)\cdot z} = e^{\left(\ln 3 + \pi\left(2n + \frac{1}{2}\right)i\right)z}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 4 *Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, calcule todos los valores de $(2z)^z$.*

SOLUCIÓN. De nuevo usando la fórmula (2),

$$(2z)^z = e^{(\log(2z))\cdot z} = e^{\left(\ln|2z| + \arg(2z)i\right)z} = e^{\left(\ln|2z| + (\operatorname{Arg}(2z) + 2\pi n)i\right)z}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

El siguiente ejemplo es importante para asegurarnos de que no existe contradicción entre las diferentes interpretaciones de las raíces de un número complejo.

Ejercicio 5 *Compruebe que, interpretando la raíz n-ésima de un número $z \neq 0$ como una potencia: $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$, aplicando la fórmula (2), el resultado que se obtiene concuerda con los valores de las raíces vistos en clase al principio del curso.*

SOLUCIÓN. Escribiendo $z = |z|e^{i\operatorname{Arg} z} = re^{i\theta}$, tenemos que $\arg z = \theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, la fórmula (2) nos da el siguiente resultado:

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i\arg z)} = e^{\frac{1}{n}\ln|z|} e^{\frac{1}{n}i\arg z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\arg z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\theta + 2\pi k}{n} i}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Es obvio que se trata de la misma fórmula que ya vimos antes en clase para la raíz n-ésima. Al igual que antes, observamos que es suficiente tener en cuenta sólo los valores $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ puesto que para los demás valores de k no se obtienen valores nuevos de la raíz. $\blacksquare$

El logaritmo, las raíces y las potencias como funciones continuas

Como ya hemos visto, todos los valores del logaritmo, de las raíces y de las potencias complejas en general pueden expresarse en términos de $\arg z$ (que toma infintos valores) y, por tanto, en términos del valor principal del argumento, $\operatorname{Arg} z$, típicamente elegido en el intervalo $(-\pi, \pi]$. ¿Sería suficiente tomar $n = 0$ (o algún otro valor fijo n_0) en la fórmula (1) para definir el logaritmo correctamente y como una función continua en todo el plano menos en el origen? Veremos que no. El siguiente hecho será nuestro punto de partida.

Observación. La función $\operatorname{Arg} z$ no es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. El problema surge cuando nos acercamos a un punto (cualquiera) en el semieje real negativo, digamos $z = -r$, $r > 0$. Por ejemplo, consideremos lo que ocurre cuando nos acercamos a $-r$ a lo largo de la circunferencia

$$\{z : |z| = r\} = \{re^{i\theta} : -\pi \le \theta \le \pi\}$$

de radio r centrada en el origen. Si nos acercamos al punto $-r$ a lo largo de esta circunferencia y "por arriba" (a través de un arco C^+ en el segundo cuadrante), donde el argumento principal toma valores entre $\pi/2$ y π), dejando que el argumento principal de z tienda a π, obtendremos

$$\lim_{z\to -r,\, z\in C^+} \operatorname{Arg} z = \lim_{\theta\to\pi^-} \theta = \pi\,.$$

(Conviene hacer un dibujo.) Sin embargo, cuando nos acercamos al punto $-r$ a lo largo de la misma circunferencia pero "desde abajo" (a través de un arco C^- en el tercer cuadrante, donde el argumento principal toma valores entre $-\pi/2$ y $-\pi$), dejando que el argumento principal de z tienda a $-\pi$, obtendremos

$$\lim_{z\to -r,\, z\in C^-} \operatorname{Arg} z = \lim_{\theta\to -\pi^+} \theta = -\pi\,.$$

Esto demuestra que no existe $\lim_{z\to -r} \operatorname{Arg} z$ y, por tanto, la función argumento principal no es continua en $-r$. Puesto que esto es así para $r > 0$ arbitrario, concluimos que no es continua en ningún punto del semieje real negativo.

Es bastante obvio que si, en lugar de $\operatorname{Arg} z$ tomamos otra determinación del valor del argumento como $\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0$, para un $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo, tendremos el mismo problema. Y si para unos valores de z definimos el valor del argumento como $\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0$ y para otros $\operatorname{Arg} z + 2\pi n_1$, con $n_0 \ne n_1$, también es fácil ver que tendremos discontinuidad en muchos puntos.

Logaritmo como función continua. Nos gustaría definir la función logaritmo complejo como $\log z = \ln|z| + (\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0)i$ para algún valor fijo n_0 (siendo la posibilidad más simple $n_0 = 0$). Pero, para que el logaritmo sea una función continua en un dominio, también lo tiene que ser su parte imaginaria, como ya vimos antes en clase, y su parte imaginaria es discontinua en todos los puntos del semieje real negativo. Por tanto, el logaritmo no se puede definir como función continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Existen dos formas razonables de solucionar este problema.

Una solución consiste en aceptar la idea de reducir el dominio de la función Arg y también de la función log excluyendo los reales negativos. Para que nos quede un dominio, debemos quitar un conjunto cerrado. Por tanto, lo más habitual es hacer un "corte" en el plano desde el origen hasta el infinito, eliminando el semieje cerrado $\{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$. De esta manera, obtenemos la siguiente definición de la función $\log : \Omega \to \mathbb{C}$:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}, \qquad \log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i\theta \qquad (z = re^{i\theta})\,.$$

Por supuesto, podemos variar esta definición, dando otro valor al argumento:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}, \qquad \log z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0) = \ln r + i\theta + 2\pi n_0 i$$

para cierto $n_0 \in \mathbb{Z}$ fijo. Cada valor de n_0 elegido nos da una *determinación* (o *rama*) del logaritmo (y cada una de ellas es una función correctamente definida). En cada situación concreta, elegiremos sólo una determinación que nos convenga y ésta nos dará una función continua en el dominio Ω señalado arriba (plano con el corte a lo largo del semieje negativo). Lo más habitual es elegir la más simple, a la que daremos un nombre propio.

Definición. La *determinación principal* del logaritmo complejo en el dominio

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$$

viene dada por la fórmula

$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i\theta \qquad (z = re^{i\theta}).$$

Con frecuencia se escribe $\operatorname{Log} z$ para denotar esta determinación principal.

Conviene señalar que, si preferimos dar otros valores al argumento, por ejemplo, en el intervalo $[0, 2\pi)$, entonces hemos de hacer el corte a lo largo del semieje real positivo $\{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$, eliminando la discontinuidad que se tiene cuando se tiende a un punto de dicho semieje. Por supuesto, son posibles otros cortes en otras direcciones (oblicuas o verticales) o incluso -de forma mucho más complicada- a lo largo de otras curvas simples (sin autointersecciones) desde el origen hasta el punto en el infinito, reduciendo el plano a un dominio simplemente conexo que no contiene al origen pero no trataremos esas definiciones aquí.

Otra posible solución, de la que no hablaremos por falta de tiempo, consiste en ampliar el dominio de definición de la función logaritmo, lo cual nos llevaría a la idea de superficies de Riemann y las llamadas funciones multiforme. Véanse los libros recomendados de A. Fernández, de L.V. Ahlfors, por ejemplo. Hablando sin rigor, una superficie de Riemann se puede imaginar como la estructura de un aparcamiento con muchas plantas donde a lo largo del corte, subimos o bajamos a la siguiente planta.

Propiedades de la función logaritmo. Veremos que, una vez definida la función logaritmo en un dominio reducido (plano con un corte) como función continua, automáticamente será holomorfa en dicho dominio. Una explicación posible es la siguiente: dentro del dominio restringido Ω, el argumento principal $\operatorname{Arg} z$, elegido en el intervalo $(-\pi, \pi)$, puede expresarse mediante la fórmula vista en la primera hoja de problemas:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{si } x < 0 \text{ e } y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{si } x < 0 \text{ e } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ e } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ e } y < 0, \end{cases}$$

Esta función es continua en Ω y, además, puede verse que en cada punto tiene las derivadas parciales iguales a las de $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Puesto que hemos definido el logaritmo en Ω como

$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arg} z,$$

es fácil calcular las derivadas parciales de $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ y $v(x, y) = \operatorname{Arg} z$ y ver que son continuas en Ω y satisfacen alli las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y, \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x.$$

Esto demuestra que la función logaritmo es, de hecho, holomorfa (lo acabamos de ver para la determinación principal pero, como las demás determinaciones difieren de ella en una constante, tendrán también la misma derivada). Además nos permite hallar la fórmula para su derivada, que es la que cabía esperar:

$$(\log z)' = u_x + i v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

Un poco más adelante, veremos que el Teorema de la función inversa para las funciones holomorfas también nos permite deducir la holomorfía del logaritmo y nos dará otra forma de calcular su derivada.

Ejercicio 6 *¿Es cierto que la determinación principal de la función logaritmo tiene la misma propiedad que el logaritmo real:* $\log(zw) = \log z + \log w$ *? ¿Podemos proponer alguna restricción adecuada para que la fórmula siga siendo válida?*

SOLUCIÓN. La respuesta en general es no. El problema surge si los argumentos de z y de w "suman demasiado" (π o más). Por ejemplo, si $z = i = e^{(\pi/2)i}$, $w = e^{(3\pi)/4i}$, entonces $zw = e^{(5\pi)/4i} = e^{-(3\pi)/4i}$ (¡hay que elegir el argumento principal en el intervalo $(-\pi,\pi)$!) y entonces

$$\log z = \log i = \frac{\pi}{2}i, \quad \log w = \frac{3\pi}{4}i, \quad \log(zw) = -\frac{3\pi}{4}i$$

y es obvio que

$$\log z + \log w = \frac{5\pi}{4}i \neq -\frac{3\pi}{4}i = \log(zw).$$

Si pedimos que $|\operatorname{Arg} z| < \pi/2$ y $|\operatorname{Arg} w| < \pi/2$ (es sólo una posibilidad pero es una condición muy habitual, ya que significa pedir que ambas z y w tengan parte real positiva), entonces $|\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w| < \pi/2 + \pi/2 = \pi$ y es fácil ver que la fórmula $\log(zw) = \log z + \log w$ será válida. ■

Las raíces y otras potencias. Una vez definida la función logaritmo en un dominio adecuado (con una determinación elegida), en el mismo dominio podemos definir las raíces y, en general, otras potencias arbitarias, como en la fórmula (1), siendo la determinación principal:

$$a^z = e^{(\log a)\cdot z} = e^{(\ln|a| + i \operatorname{Arg} a)\cdot z}.$$

Es fácil calcular la derivada de esta función usando la del logaritmo y la Regla de la cadena:

$$(a^z)' = \left(e^{(\log a)\cdot z}\right)' = e^{(\log a)\cdot z} \log a = a^z \log a.$$

Las definiciones y los cálculos son similares para las funciones como z^a o, por ejemplo, $(2iz)^z$. En particular, el valor principal de la función raíz cuadrada se puede definir en el dominio ya conocido

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$$

por la fórmula

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\log z)} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \qquad \text{para } z = re^{i\theta}$$

y es una función holomorfa en el mismo dominio Ω. Podemos aplicar el procedimiento descrito arriba para el logaritmo con el fin de comprobar que es holomorfa y calular su derivada pero también podemos verlo pasando a la siguiente sección.

Teorema de la función inversa

Al igual que en las hojas de problemas y en clase, usaremos la notación $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ para expresar que la función f es holomorfa en el dominio Ω (es decir, es $\mathbb{C}$-diferenciable en cada punto de Ω).

Relación entre el Jacobiano y la derivada compleja. A menudo identificamos una función holomorfa f en un dominio Ω en el plano, escrita como $f = u + iv$ con u y v reales, con la función correspondiente de dos variables $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Es fácil ver que existe una relación simple pero importante entre el Jacobiano de f (vista como función de dos variables) y su derivada compleja (como función holomorfa). En efecto, teniendo en cuenta que f ha de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann, vemos fácilmente que su Jacobiano en un punto $c \in \Omega$ viene dado por

$$J_f(c) = \begin{vmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x(c) & v_x(c) \\ -v_x(c) & u_x(c) \end{vmatrix} = u_x^2(c) + v_x^2(c) = |f'(c)|^2, \tag{3}$$

recordando que la derivada compleja de f en c es $f'(c) = u_x(c) + i v_x(c)$.

Teorema de la función inversa. Dado un dominio Ω en el plano y una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, si supiésemos que f tiene función inversa g y que ésta es también holomorfa, derivando la relación $g(f(z)) = z$, calcularíamos fácilmente: $g'(f(z))f'(z)) = 1$ y de allí obtendríamos la fórmula para la derivada de g, análoga a la que conocemos del teorema de la función inversa de Cálculo: $g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z))}$, es decir,

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}.$$

Pero, ¿cómo sabemos cuándo y dónde existe la inversa g y cómo podemos deducir que es holomorfa? En esta sección abordaremos esta cuestión usando nuestros conocimientos de cálculo multivariable y de variable compleja.

Teorema. (*Teorema de la función inversa para funciones holomorfas*). Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $c \in \Omega$. Si $f'(c) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto U_c del punto c tal que la restricción $f|_{U_c}$ de f a U_c es una función biyectiva entre U_c y $f(U_c)$ y su función inversa (local) $g = (f|_{U_c})^{-1} : f(U_c) \to U_c$ es también holomorfa. En este caso, tenemos la fórmula

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \qquad \forall w \in f(U_c).$$

Demostración. La hipótesis $f'(c) \neq 0$, junto con la fórmula (3), nos dice que el Jacobiano de f en el punto c es distinto de cero. El Teorema de la función inversa de cálculo multivariable (visto en el curso de Análisis Matemático) implica la existencia de un entorno abierto U_c del punto c tal que la restricción $f|_{U_c}$ de f a U_c es una función biyectiva, el Jacobiano de $f|_{U_c}$ es distinto de cero en todo U_c y, además, su función inversa (local) $g = (f|_{U_c})^{-1} : f(U_c) \to U_c$ es también $\mathbb{R}$-diferenciable. También por el Teorema de la función inversa, la matriz Jacobiana de $f|_{U_c}$ es la matriz inversa de la Jacobiana de f en el mismo entorno. Escribiendo $g = U + iV$, con U y V sus partes real e imaginaria, respectivamente y usando la fórmula (3), para todo $z \in U_c$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} U_x(f(z)) & U_y(f(z)) \\ V_x(f(z)) & V_y(f(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \begin{pmatrix} v_y(z) & -u_y(z) \\ -v_x(z) & u_x(z) \end{pmatrix}.$$

Usando una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para u y v, de aquí se deduce fácilmente que

$$U_x(f(z)) = \frac{1}{|f'(z)|^2} v_y(z) = \frac{1}{|f'(z)|^2} u_x(z) = V_y(f(z)),$$

lo cual es una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para U y V. La otra se comprueba de forma análoga. Esto demuestra que g es holomorfa en $f(U_c)$, ya que es $\mathbb{R}$-diferenciable allí y cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por último, calculamos la fórmula para la derivada mediante el cálculo mostrado antes, al comienzo de la sección, derivando $g(f(z)) = z$ en U_c. ■

Corolario. Las funciones logaritmo y raíz n-ésima, definidas como antes, son holomorfas en su dominio de definición indicado antes y sus derivadas vienen dadas por las fórmulas

$$(\log z)' = \frac{1}{z}, \qquad (\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{nz^{1-1/n}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos visto cómo se pueden definir tanto el logaritmo como la raíz n-ésima para que sean continuas en un dominio adecuado. La primera es, por construcción, la inversa local de la función exponencial y la segunda, la inversa de la función z^n. (De hecho, ni siquiera es necesario comprobar que es la inversa global, basta trabajar con la inversa en un entorno.) Entonces la derivada se puede calcular en cada punto y se puede comprobar que las fórmulas propuestas son las correctas.

En el caso de la exponencial y el logaritmo, escribimos

$$f(z) = e^z, \quad f'(z) = e^z = f(z), \qquad g(z) = \log w.$$

Por el Teorema de la función inversa, obtenemos

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{f(g(w))} = \frac{1}{w}.$$

Cambiando la letra w por z, obtenemos la fórmula del enunciado.

En el caso de la potencia y la ráiz n-ésimas, tenemos

$$f(z) = z^n, \quad g(w) = \sqrt[n]{w}, \qquad f'(z) = nz^{n-1}.$$

y, por tanto,

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{ng(w)^{n-1}} = \frac{1}{nw^{(n-1)/n}}.$$

De nuevo, cambiando w por z, obtenemos la fórmula del enunciado. ■

Ejercicio 7 *Examinar la invertibilidad de la función coseno.*

SOLUCIÓN. Para $f(z) = \cos z$, sabemos que $f'(z) = -\operatorname{sen} z$. Es fácil ver (véase la entrega anterior de los apuntes) que el seno complejo tiene los mismos ceros que el seno real: $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, si tenemos un punto $z \neq \pi n$ para $n \in \mathbb{Z}$, tendremos $f'(z) \neq 0$ en ese punto y, por tanto, al menos en un entorno del punto existirá la función inversa (local) del coseno, a la que (por supuesto) llamaremos *arco coseno* y denotaremos arccos: es decir, $g(w) = \arccos w$ si $f(z) = \cos z = w$. Por la fórmula del Teorema de la función inversa, obtenemos

$$(\arccos w)' = \frac{1}{-\operatorname{sen} g(w)} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 g(w)}} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{1}{i\sqrt{w^2-1}} = -\frac{i}{\sqrt{w^2-1}},$$

parecido a la fórmula para las funciones de una variable pero eligiendo el signo del seno de forma diferente y usando el valor principal $\sqrt{-1} = i$. ■

¿Cómo determinaríamos una fórmula explícita para $\arccos z$? Podemos aplicar el método empleado en el Ejercicio 2, obteniendo la siguiente fórmula: $\arccos z = -i \log(z + \sqrt{z^2-1})$ en un dominio adecuadamente elegido. Nótese que su derivada coincide con la hallada en el Ejercicio 7.

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20