Variable Compleja I **(CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Las convergencias puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones

Definición. Se dice que la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente a la función f en en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si para todo $z \in A$ la sucesión $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ de números complejos converge al número complejo $f(z)$ cuando $n \to \infty$; es decir, si

$$\forall z \in A \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

Decimos que la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a la función f en en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ (y escribimos $f_n \rightrightarrows_A f$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \forall z \in A \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

Es irrelevante si ponemos la desigualdad estricta ($< \varepsilon$) o no ($\leq \varepsilon$) porque es fácil comprobar que ambas definiciones son equivalentes. Por tanto, la formulación de convergencia uniforme con $\leq \varepsilon$ es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon .$$

En otras palabras, $f_n \rightrightarrows f$ en A si y sólo si $\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 1 *Demuestre que la sucesión de funciones complejas $f_n(z) = z^n$:*

(a) converge a cero puntualmente si $|z| < 1$;
(b) converge a 0 uniformemente en cualquier subconjunto compacto del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
(c) no converge uniformemente en $\mathbb{D}$.
(d) diverge si $|z| \geq 1$ y $z \neq 1$.

SOLUCIÓN. (a) Sabemos de Cálculo I que si $q \in \mathbb{R}$ y $|q| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Por tanto, si $|z| < 1$, tomando como $q = |z|$, vemos que $|z^n| = |z|^n \to 0$, lo cual significa que $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

(b) Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ (notación frecuente: $K \Subset \mathbb{D}$). Puesto que K es cerrado y acotado, es fácil ver (y lo hemos justificado con detalle en clase) que existe un número R, $0 < R < 1$, tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \leq R$. Si $z \in K$ entonces $|z^n| = |z|^n \leq R^n$ así que

$$\sup_{z \in K} |z^n - 0| \leq R^n \to 0 , \qquad n \to \infty .$$

Por lo tanto, $z^n \rightrightarrows 0$ en K.

(c) La sucesión $f_n(z) = z^n \to 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$ así que sólo tenemos que examinar si $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f_n(z)| \to 0$ o no cuando $n \to \infty$. Por definición, el supremo de un conjunto es mayor o igual que cualquier valor del conjunto, así que, eligiendo $z = 1 - (1/n)$, vemos que

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |f_n(z)| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |z|^n \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n , \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{z \in \mathbb{D}} |f_n(z)| \right) \geq \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} .$$

Se sigue que $\sup_{z\in\mathbb{D}}|f_n(z)| \not\to 0$, así que la convergencia no es uniforme en $\mathbb{D}$.

(d) Sabemos de Cálculo I que $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ cuando $q\in\mathbb{R}$ y $q>1$. Si $|z|>1$ entonces $|z^n| = |z|^n \to +\infty$, lo cual significa por definición que $\lim_{n\to\infty} z^n = \infty$ (en el plano complejo extendido).

Queda por comprobar que z^n diverge si $|z|=1$ y $z\neq 1$. Equivalentemente, veremos que $|z|=1$ junto con la convergencia de z^n a un valor implica que $z=1$. Hay, por lo menos, dos maneras de ver esto.

Una demostración, más larga pero instructiva (que se puede saltar en una primera lectura de estos apuntes) es como sigue. Sea $z=e^{it}$. Por la fórmula de A. de Moivre, $z^n = e^{int} = \cos nt + i \operatorname{sen} nt$. Si esta sucesión compleja converge, entonces también convergen las sucesiones reales $x_n = \cos nt$ e $y_n = \operatorname{sen} nt$. Veremos que esto sólo es posible cuando $e^{it}=1$. Sean $x=\lim_{n\to\infty} x_n$ e $y=\lim_{n\to\infty} y_n$. Entonces también $x=\lim_{n\to\infty} x_{2n}$ e $y=\lim_{n\to\infty} y_{2n}$. Eso significa que

$$x_{2n} = \cos 2nt = 2\cos^2 nt - 1 = 2x_n^2 - 1\,, \qquad y_{2n} = \operatorname{sen} 2nt = 2\operatorname{sen} nt \cos nt = 2x_n y_n\,.$$

Pasando al límite cuando $n\to\infty$, obtenemos que

$$x = 2x^2 - 1\,, \qquad y = 2xy\,.$$

De la segunda igualdad se sigue que o bien $y=0$ o bien $x=1/2$. Como el valor $x=1/2$ no satisface la condición $x=2x^2-1$, se sigue que $y=0$. Puesto que la identidad básica $\cos^2 nt + \operatorname{sen}^2 nt = 1$ implica $x^2+y^2=1$, concluimos que $x=1$ ó $x=-1$. De nuevo, $x=-1$ incumple $x=2x^2-1$, así que $x=1$. Por lo tanto, hemos llegado a la conclusión de que $\cos nt \to 1$, $\operatorname{sen} nt \to 0$ cuando $n\to\infty$.

Usando esta última conclusión y tomando el límite cuando $n\to\infty$ en la fórmula

$$x_{n+1} = \cos(nt+t) = \cos nt \cos t - \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $1=\cos t$, mientras que tomando el límite cuando $n\to\infty$ en la fórmula

$$y_{n+1} = \operatorname{sen}(nt+t) = \operatorname{sen} nt \cos t + \cos nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $0=\operatorname{sen} t$ y, por tanto, $z=e^{it}=1$, que es lo que queríamos demostrar.

Otra demostración, mucho más breve, es la siguiente. Supongamos lo contrario: que para cierto z con $|z|=1$ existe el límite $z_0=\lim_{n\to\infty} z^n$. Entonces también $z_0=\lim_{n\to\infty} z^{n+1}$. Puesto que $|z|=1$, se sigue que $z^n\neq 0$ y $|z_0|=1$ y, por tanto, $z_0\neq 0$. Luego

$$z = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}}{z^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_0}{z_0} = 1\,.$$

Conclusión: cuando $|z|=1$, la sucesión z^n sólo puede ser convergente si $z=1$, el caso trivial ya considerado antes. ■

Definición. La serie compleja $\sum_{n=1}^\infty z_n$ converge absolutamente si converge la serie asociada de números positivos $\sum_{n=1}^\infty |z_n|$.

Al igual que en Cálculo I (para las series de números reales), si una serie converge absolutamente entonces converge y su suma cumple $\left|\sum_{n=1}^\infty z_n\right| \le \sum_{n=1}^\infty |z_n|$.

Definición. Diremos que la serie funcional $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ converge uniformemente en $A\subset\mathbb{C}$ a la suma $S(z)$ si las sumas parciales $S_N(z)=\sum_{n=1}^N f_n(z)$ convergen uniformemente a $S(z)$ en $A\subset\mathbb{C}$.

Teorema. (*Criterio de Weierstrass*) Si para todo $n \in \mathbb{N}$ (o incluso para todo $n \geq N_0$ para un $N_0 \in \mathbb{N}$ fijo) y para todo $z \in A$ se cumple $|f_n(z)| \leq M_n$ y la serie de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A y absolutamente para todo $z \in A$ y su suma satisface la desigualdad $\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$.

Observación. El criterio de Weierstrass sólo nos permite concluir que la serie converge pero no nos da ninguna información acerca del valor de la suma.

Ejercicio 2 *¿Para qué valores de z converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$? ¿Qué podemos afirmar acerca del tipo de convergencia para esos valores?*

SOLUCIÓN. Si la serie converge para un valor de z, entonces el término general $z^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Según el resultado del anterior ejercicio, para que esto ocurra se tiene que cumplir la condición $|z| < 1$. Veamos ahora que la serie converge en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

De hecho, veremos más: la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto K de $\mathbb{D}$. Las sumas parciales de la serie son conocidas y convergen puntualmente:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z}, \qquad N \to \infty.$$

Si fijamos un subconjunto compacto $K \Subset \mathbb{D}$, existe un número $r \in (0,1)$ tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \leq r$. Entonces, por la desigualdad triangular inversa, $|1 - z| \geq 1 - |z| \geq 1 - r > 0$ y luego podemos estimar la diferencia de las sumas parciales y la suma de la serie:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{z^{N+1}}{1-z}\right| \leq \frac{r^{N+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

La última cantidad tiende a cero cuando $N \to \infty$ (independientemente de $z \in K$ ya que r es fijo); es decir,

$$\sup_{z \in K}\left|\sum_{n=0}^{N} z^n - \frac{1}{1-z}\right| \leq \frac{r^{N+1}}{1-r} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Por definición, esto significa que las sumas parciales $\sum_{n=0}^{N} z^n$ convergen a $\frac{1}{1-z}$ uniformemente en K.

Proposición. Si $f_n \rightrightarrows_A f$ y las funciones f_n son todas continuas en el conjunto $A \subset \mathbb{C}$, entonces f también es continua en A. En particular, si las funciones f_n son todas continuas en el conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y la serie funcional $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente en A a la suma $S(z)$, entonces S es también continua en A.

DEMOSTRACIÓN. Vista en clase (sencilla). ■

Ejercicio 3 *(a) Demuestre que la serie funcional compleja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

converge uniformemente en los subconjuntos compactos del disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

(b) ¿Es la suma de la serie una función continua en $\mathbb{D}$?

SOLUCIÓN. (a) Sea $K \Subset \mathbb{D}$; entonces existe $r \in (0,1)$ tal que $|z| \le r$ para todo $z \in K$ se cumple. Por la desigualdad triangular inversa, $|1-z^n| \ge 1-|z^n| \ge 1-r^n \ge 1-r > 0$ ya que $r^n \le r$ (puesto que $0 < r < 1$). Por tanto, tenemos la siguiente estimación para todo $z \in K$:

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| = \frac{|z|^n}{|1-z^n|} \le \frac{r^n}{|1-z^n|} \le \frac{r^n}{1-|z|^n} \le \frac{r^n}{1-r}$$

y la serie $\sum_n \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}\sum_n r^n$ converge. El criterio de Weierstrass implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ converge uniformemente en K. (Obsérvese que era importante hacer una estimación donde no aparezca la n en el denominador de los términos de la serie numérica, para tener una serie más manejable y cuya convergencia se pueda establecer con facilidad.)

(b) Todos los términos de la serie son funciones racionales y el denominador $1-z^n \neq 0$, luego son funciones continuas en $\mathbb{D}$. En particular, también lo son en cada $K \Subset \mathbb{D}$. Puesto que la convergencia es uniforme en cada $K \Subset \mathbb{D}$, por la proposición enunciada antes, la suma de la serie es continua en cada $K \Subset \mathbb{D}$.

Esto fácilmente implica que la suma es continua en todo $\mathbb{D}$ pero hay que razonarlo cuidadosamente: debemos ver que para cada $z \in \mathbb{D}$, es continua en algún disco abierto $D(z;\delta)$. Podemos hacerlo como sigue: tomamos un disco $D(z;r) \subset \mathbb{D}$. Su frontera podría tener intersección con la frontera de $\mathbb{D}$ pero si consideramos un disco cerrado de radio más pequeño, por ejemplo, $\overline{D}(z;\delta/2)$, éste ya será un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ y, por lo que hemos demostrado, la suma de la serie es continua en $\overline{D}(z;\delta/2)$. Por tanto, también lo es en el disco abierto $D(z;\delta/2)$. Esto completa la demostración. ■

Ejercicio 4 *¿Para qué valores de z converge la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$*?*

SOLUCIÓN. Después del cambio de variable

$$w = \frac{1+z}{1-z},$$

la serie se convierte en la serie geométrica de la variable w, que -después de los cálculos pertinentes- se puede volver a transformar en una función de z:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1-z}{-2z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}.$$

Puesto que la serie geométrica sólo converge cuando $|w| < 1$, nuestra serie será convergente sólo para aquellos z que cumplan $|1+z| < |1-z|$. Es decir, cuando $|z-(-1)| < |z-1|$.

Podemos entender el conjunto (lugar geométrico) obtenido de dos maneras: geométrica y algebraica. Ambas son sencillas pero instructivas.

Geométricamente, dicho conjunto representa el lugar geométrico de los puntos que están más cerca de -1 que de 1, que es el semiplano izquierdo abierto.

Lo mismo se puede ver algebraicamente: el conjunto indicado es el conjunto de los puntos para los que $|1+z|^2 < |1-z|^2$. Haciendo uso de la fórmula habitual: $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$, vemos que esto es equivalente a

$$1 + |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, z < 1 + |z|^2 - 2\mathrm{Re}\, z.$$

Esta desigualdad se reduce a $\mathrm{Re}\, z < 0$, lo cual significa que z está el semiplano izquierdo abierto. ■

Series de potencias

Definición. Sean $c \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$. La suma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ se denomina serie de potencias (centrada en $z = c$). Los números a_n son los coeficientes de la serie.

Mencionamos algunos ejemplos.

- Cada polinomio de z de grado N es una serie de potencias, donde $a_n = 0$ para todo $n > N$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots$ es una serie de potencias centrada en el origen ($c = 0$).
- Por supuesto, la suma puede empezar desde otro valor de n, distinto de cero (considerando los coeficientes iniciales $a_k = 0$), por ejemplo,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)(n-2)}(z+2i)^n .$$

  En este caso, $c = -2i$ mientras que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

- Es importante observar que $\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n = \frac{1}{z-1} + 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots$ no es una serie de potencias centrada en $c = 1$, debido a la presencia del término $(z-1)^{-1}$. (Advertencia: eso no significa que la suma no pueda escribirse como serie de potencias centrada en otro punto, pero éste es un asunto diferente que trataremos en otro capítulo.)

Para una serie de potencias, se plantean varias preguntas naturales: para qué valores de z converge, cómo converge, si representa una función continua o diferenciable, etc. Como veremos más adelante, las series de potencias representarán nuestro ejemplo principal de funciones holomorfas en discos abiertos.

A. Convergencia de series de potencias. Es obvio que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ converge (absolutamente) para $z = c$, siendo la suma a_0. ¿Converge para algún otro valor de z? Nuestra primera tarea es determinar esos valores, si los hubiera. La respuesta viene dada por el siguiente teorema fundamental que debemos al matemático noruego Niels H. Abel (1802–1829).

Teorema. (*Abel*) Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, existe un valor $R \in [0, +\infty]$ tal que la serie:
- converge absolutamente cuando $|z-c| < R$;
- converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(c; r) = \{z : |z-c| \leq r\}$, donde $r < R$ (equivalentemente, converge uniformemente en cada subconjunto compacto $K \Subset D(c; R)$);
- diverge cuando $|z-c| > R$ (etendiendo que converge para todo z cuando $R = +\infty$).

El valor de R es único y viene dado por la *fórmula de Cauchy-Hadamard*:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

entendiendo que $1/+\infty = 0$ y $1/0^+ = +\infty$. (Por supuesto, con frecuencia usaremos también la notación alternativa $\overline{\lim}$ para denotar al $\limsup$.)

Definición. El disco $D(c; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ se denomina disco de convergencia de la serie de potencias y el valor R (finito o infinito) radio de convergencia. (Obviamente, es un verdadero disco sólo cuando $0 < R < +\infty$; cuando $R = 0$, la región de convergencia es sólo el punto c y, cuando $R = +\infty$, se trata de todo el plano.)

DEMOSTRACIÓN. Existen diferentes pruebas. Aquí daremos una bastante breve, distinta de la explicada en clase. Hay que discutir dos casos diferentes: $R = 0$ y $R > 0$.

Primero, consideremos el caso cuando $R = 0$. No existen puntos tales que $|z - c| < 0 = R$, así que sólo hay que demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ diverge para todo z con $|z - c| > 0$, es decir, para todo $z \neq c$. Sea z arbitrario con $z \neq c$. Puesto que, por hipótesis, $0 = R = 1/(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n})$, es decir, $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$, se sigue que existen infinitos índices $k \in \mathbb{N}$ tales que $|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|z-c|}$. Entonces para cada uno de esos valores de k tenemos que $|a_k(z-c)|^k| > \frac{1}{|z-c|^k} \cdot |z-c|^k = 1$. Por tanto, el término general, $a_n(z-c)^n$ de nuestra serie no puede tender a cero cuando $n \to \infty$, así que la serie diverge.

Consideremos ahora el caso $R > 0$. Para r arbitrario tal que $0 < r < R$, veamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\}$, para $0 < r < R$. En primer lugar, existe ρ tal que $r < \rho < R$. Puesto que, por hipótesis, $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1/R < 1/\rho$, por la definición del límite superior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{1/n} < 1/\rho$ para todo $n \geq N$. Entonces

$$|a_n(z-c)^n| = |a_n||z-c|^n < \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Puesto que $0 < r/\rho < 1$, la serie geométrica $\sum_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ converge. Por el criterio de Weierstrass, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-c)^n$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\}$. Puesto que esto se cumple para todo r con $0 < r < R$, se sigue que la serie de potencias converge absolutamente en todo el disco abierto $D(c;R)$.

Nos queda por comprobar que la serie diverge cuando $|z - c| > R$. Sea z un número arbitrario con esta propiedad y elijamos un valor r tal que $|z - c| > r > R$. Entonces $1/r < 1/R$ y, por la definición del límite superior, existe un conjunto infinito de índices $k \in \mathbb{N}$ tales que $|a_k|^{1/k} > 1/r$. Para cada uno de esos valores de k obtenemos que

$$|a_k(z-c)^k| > \left(\frac{|z-c|}{r}\right)^k \to \infty, \qquad k \to \infty,$$

lo cual significa que el término general de nuestra serie de potencias no tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie diverge. ■

Observación. **1**. El teorema de Abel nos da una nueva perspectiva -más general- de las series de potencias reales, vistas en Cálculo I: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, con c, $a_n \in \mathbb{R}$. Esas series son, obviamente, un caso especial de las series de potencias complejas. Para $z \in \mathbb{C}$, convergen típicamente en un disco $D(c;R)$ pero, para $x \in \mathbb{R}$, convergen en un intervalo abierto $(c-R, c+R)$ de la recta real. Hay que darse cuenta de que $(c-R, c+R) = D(c;R) \cap \mathbb{R}$. Por tanto, el teorema aquí visto es una generalización del resultado visto en Cálculo I.

2. El teorema de Abel no indica nada acerca de la convergencia o divergencia en la circunferencia $|z-c| = R$ de centro c y radio R, ya que caben todas las posibilidades: convergencia en toda la circunferencia, divergencia en cada punto de la circunferencia, convergencia en algunos puntos de la circunferencia y divergencia en el resto. Veamos algunos ejemplos.

Ejercicio 5. *Discuta la convergencia de las series funcionales* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

SOLUCIÓN. Ambas son series de potencias centradas en el origen ($c = 0$) así que es aplicable el Teorema de Abel. En ambos casos, la fórmula de Cauchy-Hadamard implica fácilmente que $R = 1$ (en uno de ellos porque $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Por tanto, ambas series convergen absolutamente en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y divergen para $|z| > 1$. Además, convergen uniformemente en cualquier disco $\{z : |z| \leq r\}$, $0 < r < 1$ (y, por tanto, en cualquier $K \Subset \mathbb{D}$).

Sin embargo, veremos que existe una gran diferencia en cuanto a la convergencia de ambas series en la circunferencia unidad $\{z : |z| = 1\}$. A saber, la primera diverge en todos los puntos de la circunferencia mientras que la segunda converge en todos (y, de hecho, converge uniformemente en toda la circunferencia y en todo el disco unidad cerrado).

La primera serie es la conocida serie geométrica (Ejercicio 2) cuyas sumas parciales son

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z}, \qquad N \to \infty.$$

Aunque la suma $\frac{1}{1-z}$ tiene sentido para todo $z \neq 1$, la serie geométrica sólo coincide con ella en $\mathbb{D}$, el disco unidad abierto, y no puede ser convergente en ningún punto de la circunferencia unidad. En efecto, si $|z| = 1$, entonces o bien $z^n \to 1$ (si $z = 1$) o bien z^n diverge (en el caso contrario) por el Ejercicio 1. Por tanto, el término general de la serie, $z^n \not\to 0$ en la circunferencia cuando $n \to \infty$, luego la serie diverge allí.

Sin embargo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en todo el disco unidad cerrado $\{z : |z| \le 1\}$ debido al Criterio de Weierstrass, ya que para $n \ge 1$ allí se tiene que $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. ■

Existen otros ejemplos, más complicados que el Ejercicio 5 donde el comportamiento en el borde del disco de convergencia varía de un punto a otro. Sin embargo, muchos de ellos requieren más resultados teóricos de los que podemos dar en este curso (tal vez algunos se podrán ver en el curso optativo de Variable Compleja II). Para ver otro ejemplo relativamente elemental, necesitaremos primero recordar el siguiente resultado, conocido de los cursos de Cálculo.

Teorema. (*Criterio de Abel-Dirichlet*) Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ de números complejos y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ de números reales cumplen las siguientes condiciones:

(1) Las sumas parciales $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ forman una sucesión acotada;

(2) $(b_n)_n$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

No es difícil dar una demostración usando el Criterio de Cauchy pero la omitiremos aquí.

Ejercicio 6. *Supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *es* 1 *y que, además,* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *es decreciente y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(a) Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *converge en cada punto* z *con* $|z| = 1$ *salvo, posiblemente, en* $z = 1$.

(b) Demuestre, dando un ejemplo concreto, que una serie de este tipo puede ser divergente en $z = 1$.

SOLUCIÓN. (a) Sea z fijo con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Podemos aplicar el Criterio de Abel-Dirichlet eligiendo $a_n = z^n$, puesto que

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \le \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|}$$

y, por tanto, la sucesión (A_n) está acotada por un número fijo. Se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge para todo z con $|z| = 1$, $z \neq 1$.

(b) El ejemplo de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, con $b_n = \frac{1}{n}$ (decreciente y convergente a cero) muestra que una serie con las características exigidas puede ser divergente para $z = 1$ (puesto que en ese punto se convierte en la conocida serie armónica). ■

El siguiente ejercicio nos muestra cómo tratar un caso de serie con "lagunas" (donde muchos términos son cero).

Ejercicio 7. *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2i)^n z^{n^3}$.

Solución. Observemos primero que el coeficiente a_k de la serie es no nulo si y sólo si $k = n^3$ y que en este caso $n = k^{1/3}$. Así obtenemos la siguiente fórmula para el coeficiente k-ésimo y su módulo:

$$a_k = \begin{cases} (-2i)^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases} \qquad |a_k| = \begin{cases} 2^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases}$$

Luego

$$\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} 2^{(k^{1/3}/k)} = \lim_{k\to\infty} 2^{k^{-2/3}} = 2^0 = 1\,.$$

Finalmente, Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard, obtenemos $R = 1$. ∎

Una fórmula alternativa para el radio de convergencia. Recordemos el siguiente hecho conocido del cálculo elemental: para toda sucesión $(c_n)_n$ de números positivos se cumple la desigualdad

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}\,.$$

Por tanto, si existe $\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$, las cuatro cantidades coinciden y $\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}$. Como consecuencia, en el caso cuando $a_n \neq 0$ para todo n (o para todo $n \geq N$) y cuando el límite del cociente existe, tenemos la siguiente fórmula alternativa (también llamada la fórmula del cociente) para el radio de convergencia.

Teorema. (*Fórmula de Hadamard*). Si $a_n \neq 0$ para todo $n \geq N$ y existe cualquiera de los límites que aparecen en la fórmula abajo (como límite finito o infinito), el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ es

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Observación. Es importante notar que esta fórmula no es aplicable a las series que tienen una cantidad infinita de coeficientes nulos, como la del Ejercicio 7. Sin embargo, es muy eficaz para las series cuyos coeficientes contienen factoriales u otros términos que permitan cancelaciones, como las del Ejercicio 5 o la de nuestro siguiente ejemplo.

Ejercicio 8. *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Solución. Según la fórmula de Hadamard y después de la cancelación,

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty\,.$$

Por tanto, la serie dada converge absolutamente en todo el plano complejo y uniformemente en cada disco cerrado, según el Teorema de Abel. Esta serie es muy importante en las Matemáticas y volveremos a hablar de ella en breve. ■

Observación. La fórmula de Hadamard que involucra los cocientes suele ser mucho más sencilla para las series de potencias cuyos coeficientes contienen factoriales. ¿Cómo trataríamos esas situaciones usando la fórmula de Cauchy-Hadamard (con la raíz n-ésima)? Podemos usar la *fórmula de Stirling*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to \infty,$$

conocida de los cursos de Cálculo y Probabilidad. De dicha fórmula se desprende que

$$(n!)^{1/n} \sim \sqrt[2n]{2\pi}\,\sqrt[2n]{n}\,\frac{n}{e}, \qquad n \to \infty,$$

lo cual ayuda a encontrar el $\overline{\lim}$ pertinente.

B. Operaciones algebraicas con series de potencias. Veremos ahora que dos series de potencias, centradas en el mismo punto, se pueden sumar y multiplicar, interpretando la suma y el producto de manera adecuada. El caso de la suma es más inmediato.

Proposición. Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ es, por lo menos, $R=\min\{R_a,R_b\}$ y, además, se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n \tag{1}$$

para todo $z \in D(c;R)$.

Observación. El enunciado dice “por lo menos” porque es posible que el radio de la serie para la suma sea más grande. Por ejemplo, cuando $R_a < +\infty$ y $b_n = -a_n$, tenemos $R_a = R_b$ (por la fórmula de Cauchy-Hadamard) pero la suma es la serie cuyos coeficientes son todos idénticamente nulos y, por tanto, converge en todo el plano.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar sólo el caso cuando $R_a \le R_b$ (y, por tanto, $R = R_a$), siendo el otro caso completamente análogo. En este caso, ambas series convergen en $D(c;R)$ y las sumas parciales claramente cumplen la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{N}|(a_n+b_n)(z-c)^n| \le \sum_{n=0}^{N}|a_n(z-c)^n| + \sum_{n=0}^{N}|b_n(z-c)^n| \le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n(z-c)^n| + \sum_{n=0}^{\infty}|b_n(z-c)^n|,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $z \in D(c;R)$ (porque las dos series de potencias dadas convergen absolutamente en $D(c;R)$), lo cual demuestra que, para $z \in D(c;R)$ fijo, la serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty}|(a_n+b_n)(z-c)^n|$ converge (por los resultados elementales vistos en Cálculo I). Por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ converge absolutamente en $D(c;R)$.

Una vez establecida la convergencia de la serie correspondiente a la suma, tomando el límite cuando $N \to \infty$ en la igualdad obvia:

$$\sum_{n=0}^{N}(a_n+b_n)(z-c)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-c)^n + \sum_{n=0}^{N} b_n(z-c)^n,$$

se sigue (1). ■

Ejercicio 9. *Calcule la suma de las series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ *y determine el disco de convergencia.*

SOLUCIÓN. La segunda serie es, en efecto, una serie de potencias porque $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ (así que $a_n = (-1)^n$). Por la proposición anterior, la suma de nuestras series es

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)z^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2z^{2k} = 2(1+z^2+z^4+z^6+\ldots),$$

ya que $1+(-1)^n = 0$ para n impar y $1+(-1)^n = 2$ cuando n es par: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. El radio de convergencia de esta nueva serie es, por lo menos, uno (por la proposición anterior) y es fácil establecer que es exactamente uno por la fórmula de Cauchy-Hadamard, con una cuenta muy parecida a la del Ejercicio 7.

Usando la fórmula para la suma de una serie geométrica, es fácil ver que la suma de la serie obtenida arriba es $\frac{2}{1-z^2}$, para los z con $|z| < 1$. ■

El producto de dos series de potencias es más delicado. Existen varias maneras de definir algún tipo de "producto" de dos series de potencias (el de Cauchy, el de Hadamard - o la convolución- y otros) pero el que nos interesa es el producto de Cauchy de dos series, que se corresponde de manera natural con el producto de las funciones definidas por las series en cuestión.

El concepto de producto de Cauchy, de hecho, tiene sentido para dos series numéricas pero incluso este caso básico está motivado por las series de potencias. Además, una vez demostrado formalmente, ¡se aplica a ellas! El siguiente teorema se debe al matemático polaco-aleman Franz (Franciszek) Mertens (Prusia, 1840 - Viena, 1927).

Teorema. (Mertens). Si las series de números (reales o complejos) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen (al menos una de ellas absolutamente) y

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k \left(= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots a_{n-1}b_1 + a_nb_0\right),$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ también converge y

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{2}$$

Observación. Antes de la demostración, veamos la motivación para esta definición, que proviene precisamente de las series de potencias. Si multiplicamos formalmente dos series de potencias de z (como si fueran polinomios, sin ocuparnos de su convergencia), agrupando los términos que contienen la misma pontencia z^n para cada $n \ge 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) &= (a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots a_nz^n + \ldots)(b_0 + b_1z + b_2z^2 + \ldots b_nz^n + \ldots) \\
&= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_2)z^2 + \ldots \\
&\quad + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots a_{n-1}b_1 + a_nb_0)z^n + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.
\end{aligned}$$

Poniendo ahora $z = 1$, obtenemos (2), al menos formalmente. Ahora queda por justificar la convergencia.

La demostración dada abajo se puede omitir en una primera lectura de estos apuntes, centrándose en las aplicaciones del resultado.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es la serie que converge absolutamente (siendo el otro caso totalmente análogo). Sean

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B\,.$$

Hemos de demostrar, con los c_n definidos como antes, que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$. Para simplificar la notación, definamos

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\,, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\,, \qquad \beta_n = B_n - B\,.$$

Entonces, partiendo de la definición de los c_k y agrupando los términos que contienen a_0, a_1,..., a_n respectivamente en la suma en la primera línea y agrupando los términos que contienen B en la penúltima, obtenemos

$$\begin{aligned}
C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_2) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots a_{n-1}b_1 + a_0b_n)\\
&= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0\\
&= a_0(B+\beta_n) + a_1(B+\beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B+\beta_0)\\
&= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0\\
&= A_nB + \gamma_n\,.
\end{aligned}$$

Puesto que $A_nB \to AB$ cuando $n \to \infty$, para demostrar que $C_n \to AB$, sólo queda demostrar que $\gamma_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ha llegado el momento de usar la hipótesis sobre la convergencia absoluta de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Sea $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Puesto que $B_n \to B$ cuando $n \to \infty$, sabemos que $\beta_n = B_n - B \to 0$. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\beta_n| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Entonces, usando la desigualdad triangular, para $n > N$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &= |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_1\beta_{n-1} + a_0\beta_n|\\
&\le |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + |a_{n-N+1}\beta_{N+1}| + \ldots + |a_0\beta_n|\\
&\le |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + \varepsilon|a_{n-N+1}| + \ldots + \varepsilon|a_0|\\
&\le |a_n\beta_0| + |a_{n-1}\beta_1| + \ldots + |a_{n-N}\beta_N| + \varepsilon\alpha
\end{aligned}$$

Manteniendo N fijo y dejando que $n \to \infty$, obtenemos que $\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \le \varepsilon\alpha$, ya que la suma de los primeros $N+1$ términos tiende a 0 (razón: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, luego $a_n \to 0$ y, por tanto, también $a_{n-1} \to 0$,..., $a_{n-N} \to 0$, mientras que los β_j están acotados). Puesto que esto se cumple para $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\gamma_n| \le 0$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, QED. ∎

Corolario. Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, y definimos

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k \left(= \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} \right),$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ tiene radio de convergencia $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ y, además, coincide con el *producto de Cauchy* de las series iniciales:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n\,, \qquad \text{para todo } z \in D(c;R)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema de Mertens pero, en lugar de multiplicar dos series con términos a_n y b_n, respectivamente, multiplicamos dos series de potencias (ambas convergentes absolutamente en el disco $D(c;R)$) cuyos términos n-ésimos son $a_n(z-c)^n$ y $a_n(z-c)^n$, respectivamente. (Hace falta un poco de trabajo para agrupar los términos semejantes, como antes.) Esto implicará la convergencia de la serie producto de Cauchy, que es otra serie de potencias. Ahora es importante recordar que, puesto que la serie producto converge en el disco abierto $D(c;R)$, por el Teorema de Abel tiene que ser absolutamente convergente allí y el resultado se sigue. ■

Ejercicio 10. *Calcule el producto de Cauchy de las series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

SOLUCIÓN. Obsérvese que $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ y que nos conviene trabajar con la fórmula dada (empezando desde el índice 0).

Aplicando el Corolario del teorema de Mertens, en este caso concreto, $c = 0$, $a_n = 1$ y $b_n = n$ para todo $n \geq 0$. Luego

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

según una fórmula conocida de Conjuntos y Números y de Cálculo I que es fácil de demostrar por inducción o agrupando los términos de la suma. Por tanto,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^n\,. \qquad \blacksquare$$

C. Diferenciación de series de potencias. Resulta que las series de potencias se pueden derivar, esencialmente, de la misma forma que los polinomios, es decir, término a término. El resultado es como sigue.

Teorema. (Derivación de series de potencias) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ tiene radio de convergencia R, $0 < R \leq +\infty$, entonces representa una función holomorfa en el disco abierto $D(c;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ y se puede derivar allí término a término:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-c)^k\,, \tag{3}$$

siendo la derivada una nueva serie de potencias convergente en el mismo disco.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, veamos que la nueva serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que la inicial. Lo comprobamos usando la fórmula de Cauchy-Hadamard. Para ello, necesitaremos usar un par de reglas sencillas que no siempre se mencionan de forma explícita en el curso de Cálculo I.

Es fácil comprobar usando la definición del límite superior que, para una sucesión no negativa $(x_n)_n$ y otra positiva $(y_n)_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

En particular, esto es cierto para $y_n = \frac{n}{n-1}$. Recordemos también que, cuando b_n, $c_n > 0$ y existe $\lim_{n\to\infty} b_n$, se tiene que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(b_n c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} c_n .$$

Ahora es inmediato que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(n|a_n|)^{\frac{1}{n-1}} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(n^{1/n}|a_n|^{1/n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(n^{1/n}|a_n|^{1/n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} \cdot \overline{\lim}|a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Una vez comprobado que ambas series consideradas convergen en el mismo disco, procedemos a demostrar (3). Basta ver que se cumple

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}, \qquad \forall z \in D(c;R),$$

puesto que la segunda igualdad en (3) es simplemente un cambio de variable $k = n-1$ en la suma. Observemos que, escribiendo $w = z - c$, se tiene que $z \in D(c;R)$ si y sólo si $w \in D(0;R)$. A partir de la regla de la cadena, es claro que basta demostrar que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \qquad \forall w \in D(0;R).$$

Conviene introducir la notación

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \qquad g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \qquad |w| < R.$$

Demostraremos ahora por definición que

$$f'(w) = \lim_{h\to 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} = g(w) \tag{4}$$

para w arbitrario con $|w| < R$. Fijemos un w así; sea $\delta = (R - |w|)/2 > 0$, también fijo. Nuestro objetivo es ver que, para cualquier h complejo tal que $0 < |h| < \delta$, se cumple que

$$\left|\frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g(w)\right| \le A|h| \tag{5}$$

para cierto número positivo A y entonces (4) se seguirá.

Primero calculamos

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\right) = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left((w+h)^n - w^n\right)\right) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{(w+h)^n - w^n}{h}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g(w) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{(w+h)^n - w^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{(w+h)^n - w^n}{h} - n w^{n-1}\right). \tag{6}$$

Recordemos ahora que, debido a nuestra elección del número δ, tenemos $2\delta = R - |w|$ y, por tanto, $|w| = R - 2\delta$. Además, cuando $|h| < \delta$, vemos que

$$|h|^{j-1} = |h|^{j-2}|h| < \delta^{j-2}|h|, \qquad \text{para } j \ge 2. \tag{7}$$

Finalmente, usando la fórmula del binomio (observando una cancelación), la desigualdad triangular para sumas finitas, la desigualdad (7) y, de nuevo, la fórmula del binomio, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(w+h)^n-w^n}{h}-nw^{n-1}\right| &= \left|\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^j-nw^{n-1}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^{j-1}-nw^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^{j-1}\right| \le \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}|w|^{n-j}|h|^{j-1} \\
&\le \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^{j-2}|h| = \frac{|h|}{\delta^2}\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^j \\
&< \frac{|h|}{\delta^2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^j = \frac{1}{\delta^2}(R-\delta)^n|h|.
\end{aligned}$$

Junto con (6), la última desigualdad (aplicada para cada $n \ge 2$) implica

$$\left|\frac{f(w+h)-f(w)}{h}-g(w)\right| \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|(R-\delta)^n}{\delta^2}|h| = A|h|,$$

lo cual es la desigualdad deseada (5), ya que la suma $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|(R-\delta)^n$ es finita (y es un valor fijo). Lo es porque la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$, por hipótesis, converge absolutamente para $|w| < R$ y, en particular, para $w = R-\delta$. Esto completa la demostración. ■

Observación. Como acabamos de ver, dada una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$, la serie correspondiente a su derivada, $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-c)^{n-1}$, converge en el mismo disco. Por tanto, la operación se puede repetir tantas veces como se quiera para calcular las derivadas sucesivas. Volviendo a aplicar el teorema a la serie de f', obtenemos (haciendo después un cambio de índice: $k = n-2$)

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)(z-c)^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}(k+2)(k+1)(z-c)^k, \qquad \forall z \in D(c;R).$$

En particular, $f''(c) = 2a_2$. El proceso se puede repetir tantas veces cuantas se quiera.

Corolario. La serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ cuyo radio de convergencia es $R > 0$ es diferenciable infinitas veces en el disco $D(c;R)$ y

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty}a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(z-c)^{n-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in D(c;R).$$

En particular, cuando $z = c$, todos los términos correspondientes a $k > n$ se anulan y se obtiene $f^{(k)}(c) = k!a_k$.

Ejercicio 11. *Calcule el radio de convergencia y la suma de las serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)z^n$.

SOLUCIÓN. Calculamos fácilmente el radio de convergencia, por ejemplo, por la fórmula de Hadamard:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Recordemos que la serie geométrica también converge absolutamente en el disco unidad, siendo su suma $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. Por tanto, se puede derivar término a término en el disco unidad, obteniendo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}.$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\right)' = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,z^{k-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^{n-1}.$$

Finalmente, después de la multiplicación por z se obtiene

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^n = 2z + 6z^2 + 12z^3 + 20z^4 + \dots$$

La convergencia de la última serie se justifica fácilmente, puesto que la multiplicación por z no cambia el radio de convergencia de la serie inicial; para ver este hecho, basta aplicar la fórmula de Cauchy-Hadamard a la nueva serie. ■

Algunas funciones elementales (exponencial y trigonométricas)

A. La función exponencial. Es una de las funciones más importantes en las matemáticas y ya hemos visto su versión real en Cálculo I. Esta función se puede extender a todo el plano complejo $\mathbb{C}$, manteniendo las propiedades básicas relativas a su diferenciación y a las reglas algebraicas. Es importante recalcar que se puede definir de varias maneras (que varían de un texto a otro) pero finalmente se puede comprobar, tal y como veremos en esta sección, que las distintas definiciones coinciden y, por tanto, son todas igualmente legítimas.

Definición. La *función exponencial compleja* E se define como $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Tal y como nos demuestra Ejercicio 8, la serie de potencias que define la función $E(z)$ es absolutamente convergente en todo el plano. Veremos a continuación que, efectivamente, $E(z)$ tiene diversas propiedades características de la función exponencial real. Es muy habitual usar también la notación e^z, cosa que haremos más adelante, una vez comprobadas las propiedades de $E(z)$; es decir, una vez que hayamos confirmado que "se merece" el nombre de función exponencial. Por ejemplo, dos propiedades típicas de la exponencial real son:

$$(e^x)' = e^x, \qquad e^x e^y = e^{x+y}, \qquad e^x \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nuestros siguientes ejemplos muestran que $E(z)$ tiene las mismas propiedades.

Ejercicio 12. *Compruebe que* $E'(z) = E(z)$.

SOLUCIÓN. Derivando la serie de potencias que define la función exponencial, obtenemos $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$E'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = E(z). \qquad ■$$

Ejercicio 13. *Demuestre que la función exponencial tiene la propiedad:*

$$E(z)E(w) = E(z+w) \qquad (e^z e^w = e^{z+w}).$$

Como caso particular $w = -z$, se obtiene que $E(z)E(-z) = 1$. Por tanto, $E(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

SOLUCIÓN. Procede aplicar el producto de Cauchy de series. Es importante observar que cada una de las expresiones $E(z)$ y $E(w)$ es una serie de potencias pero de dos variables distintas. Por tanto, no podemos aplicar el corolario de Mertens para el producto de Cauchy de dos series de potencias (de la misma variable); en su lugar, aplicaremos para z y w arbitarios pero fijos el producto de Cauchy de dos series numéricas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, con $a_n = z^n/n!$ y $b_n = w^n/n!$ (la versión básica del Teorema de Mertens). Entonces los términos de la serie producto son

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!},$$

según la fórmula del binomio de Newton. Por lo tanto,

$$E(z)E(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = E(z+w).$$

El caso especial es inmediato: $E(z)E(-z) = E(0) = 1$, después de sustituir el valor $z = 0$ en la serie que define $E(z)$. La conclusión de que $E(z)$ no se anula es trivial. ■

Recordemos el siguiente resultado fundamental, demostrado en clase, que se enuncia en pocos libros de texto porque la mayoría prefiere evitar la discusión de las funciones $\mathbb{R}$-diferenciables (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$), citando sólo algunas condiciones necesarias y otras suficientes.

Teorema. Sea Ω un dominio en el plano complejo $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función compleja, $f = u + iv$ y $z \in \Omega$. Entonces f es $\mathbb{C}$-diferenciable en z (es decir, existe $f'(z)$ si y sólo si f (vista como función de dos variables $f : (x, y) \mapsto (u, v)$) es $\mathbb{R}$-diferenciable en z y satisface en el punto z las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(z) = v_y(z), \qquad u_y(z) = -v_x(z).$$

En este caso, $f'(z) = u_x(z) + i v_x(z)$.

Por tanto, f es holomorfa en Ω (tiene derivada en todos los puntos de Ω) si y sólo si es $\mathbb{R}$-diferenciable en todo punto de Ω y satisface las ecuaciones (C-R) en Ω.

Hemos definido la función exponencial a través de una serie compleja que generaliza la serie de potencias para la exponencial real. Por otra parte, también hemos insinuado que, combinando la fórmula de Euler con la exponencial real (es decir, multiplicando e^x por e^{yi}), deberíamos obtener otra fórmula para la función exponencial compleja. Uno de nuestros objetivos importantes es ver que las dos definiciones coinciden. El siguiente resultado fundamental lo confirma.

Teorema. Para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se verifica la identidad $E(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. En otras palabras, $e^z = e^x e^{yi}$.

DEMOSTRACIÓN. Para la función $f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$ es fácil comprobar que tiene las derivadas parciales continuas y, por tanto, es $\mathbb{R}$-diferenciable. También es inmediato que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \quad (= e^x \cos y), \qquad u_y = -v_x \, (= -e^x \operatorname{sen} y).$$

Por un teorema visto en clase, f es holomorfa en $\mathbb{C}$ (entera). Además, por la fórmula habitual, su derivada compleja es

$$f'(z) = u_x + i\,v_x = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = f(z)\,. \tag{8}$$

O sea, ambas $f(z)$ y $E(z)$ satisfacen la misma ecuación diferencial compleja $f' = f$. ¿Cuántas funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ existen con esta propiedad? Veámoslo.

Puesto que $E(z)$ es entera, por la Regla de la cadena, también lo es $E(-z)$, así que también lo es la función $h(z) = E(-z)f(z)$. Calculando su derivada, obtenemos

$$h'(z) = -E'(-z)f(z) + E(-z)f'(z) = -E(-z)f(z) + E(-z)f(z) \equiv 0\,,$$

teniendo en cuenta (8) y el Ejercicio 12.

Un teorema importante, visto en clase, nos dice que si una función holomorfa tiene derivada nula en un dominio plano, entonces es constante en ese dominio. La función h aquí considerada es una función entera (holomorfa en todo el plano), el plano es un dominio y $h' \equiv 0$ en $\mathbb{C}$. Por tanto, h es idénticamente constante en $\mathbb{C}$: existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $E(-z)f(z) \equiv C$. Multiplicando ambos lados de la última igualdad por $E(z)$, por el resultado del Ejercicio 13, se sigue que $f(z) = CE(z)$. Finalmente, tomando $z = 0$ y teniendo en cuenta que $E(0) = 1 = f(0)$, se sigue que $C = 1$ y, por tanto, $f(z) = E(z)$, QED. ■

Más adelante, veremos el siguiente notable hecho (basado en el Teorema de la unicidad para funciones holomorfas): toda función f holomorfa en el plano que para cada número real x satisface la igualdad $f(x) = e^x$, necesariamente es igual a la exponencial compleja E en todo el plano. Es otra manera de demostrar el teorema anterior pero, obviamente, supone un conocimiento teórico más avanzado del que tenemos de momento.

A partir de ahora, ya escribiremos siempre e^z en lugar de $E(z)$. Otra fórmula conocida de Cálculo I puede generalizarse también a los números complejos, proporcionándonos otra manera adicional de definir la función exponencial compleja.

Teorema. Para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$. La convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto del plano.

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración consiste en usar la fórmula del binomio para desarrollar la expresión dentro del límite como suma desde 0 hasta n y expresar la función exponencial como suma infinita que se divide en dos, una desde 0 hasta n y otra para índices superiores, haciendo las estimaciones pertinentes, que requieren cierto trabajo. Véanse los apuntes adicionales del profesor J.P. Moreno. ■

Ejercicio 14. *Calcule el radio de convergencia y la suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!}$.

SOLUCIÓN. El radio de convergencia de la primera serie podría calcularse como en el Ejercicio 7 (hay que tener en cuenta que muchos términos son nulos).

No obstante, existe un método alternativo para calcular el radio de convergencia (y para obtener más conclusiones). Después del cambio de variable $w = z^3$, la serie se convierte en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n!}$. Dado que el término general de esta nueva serie:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

contiene factoriales, es conveniente calcular el radio de convergencia usando la fórmula del cociente:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} == +\infty .$$

Puesto que la serie converge para cada $w = z^3$ finito, se sigue que la serie inicial también converge para todo z. Por lo tanto, su radio de convergencia es $+\infty$.

Podemos hacer más. Recordando la definición de la función exponencial, nuestra serie puede escribirse como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^3)^n}{n!} = -e^{-z^3} ,$$

de lo que también se deduce que converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier disco cerrado. ■

B. Algunas funciones trigonométricas complejas. Vamos a definir las extensiones al plano complejo de las funciones reales coseno y seno, vistas en Cálculo I. La motivación proviene de la fórmula de Euler: sumando y restando las igualdades

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t , \qquad e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

y despejando $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, obtenemos

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} , \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} .$$

Por tanto, tiene sentido proponer la siguiente definición.

Definición. Las funciones complejas *coseno* y *seno* se definen, respectivamente, en términos de la función exponencial como sigue:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} , \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} , \qquad z \in \mathbb{C} .$$

Ejercicio 15. *Desarrolle las funciones coseno y seno en series de potencias centradas en el origen y discuta su convergencia y sus derivadas.*

SOLUCIÓN. Partiendo del desarrollo conocido de la exponencial: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, válido para todo z en el plano, evaluamos la misma serie en iz y $-iz$ respectivamente. Luego sumamos ambas series, según la proposición vista antes:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left(i^n + (-i)^n \right) z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} ,$$

una fórmula cuyo caso especial con $z \in \mathbb{R}$ ya vimos en Cálculo. La última igualdad es tiene porque $i^n + (-i)^n = 0$ para n impar y para $n = 2k$ (par) se tiene $i^{2k} + (-i)^{2k} = 2(-1)^k$.

De manera similar, obtenemos

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} .$$

Usando el teorema sobre diferenciación de series de potencias, una comprobación rutinaria muestra que se siguen cumpliendo las fórmulas conocidas para las funciones trigonométricas reales:

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z\,, \qquad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,, \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 16 *Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Demuestre que las series complejas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\cos(nz)\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}\operatorname{sen}(nz)$$

convergen absoluta y uniformemente en la banda horizontal cerrada

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| \le 1 - \varepsilon\}\,.$$

SOLUCIÓN. (Este es un ejercicio que podríamos haber visto en las primeras páginas de estos apuntes pero no lo hicimos porque nos faltaba la definición de las funciones trigonométricas complejas.) Conviene comenzar observando que las series no están escritas en forma de series de potencias y, por tanto, no podemos usar ningún teorema aplicable a éstas.

Cuando $z = x + iy \in \Omega_\varepsilon$, tenemos $|y| \le 1 - \varepsilon$ y, por tanto, $e^{\pm y} \le e^{1-\varepsilon}$. Luego (aplicando la definición de la función exponencial, la desigualdad triangular y esta última desigualdad para la función exponencial)

$$\begin{aligned} |e^{-n}\cos nz| &= \left| e^{-n}\cdot \frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2}\right| = \frac{e^{-n}}{2}\cdot\left|e^{inx}e^{-ny}+e^{-inx}e^{ny}\right| \\ &\le \frac{e^{-n}}{2}\cdot\left(e^{-ny}+e^{ny}\right) \le \frac{e^{-n}}{2}\cdot 2\cdot e^{n(1-\varepsilon)} = e^{-n\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

La serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon}$ es sumable, al ser una serie geométrica cuya razón es $q = e^{-\varepsilon} < 1$. El criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\cos nz$ converge absoluta y uniformemente en cada Ω_ε. ■

Definición. Las funciones complejas *tangente* y *cotangente* se definen, respectivamente, en términos de las funciones seno y coseno como sigue: $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ para aquellos z donde el cociente tiene sentido.

Un ejercicio útil e instructivo consiste en determinar los puntos donde las funciones tangente y cotangente no están definidas, es decir, determinar los ceros complejos de las funciones coseno y seno, respectivamente.

Ejercicio 17. *Resuelva la ecuación compleja* $\cos z = 0$.

SOLUCIÓN. Escribiendo $z = x+iy$ y usando la fórmula de Euler, de la definición del coseno complejo se obtiene

$$0 = e^{iz} + e^{-iz} = \cos x(e^y + e^{-y}) + i\left(e^{-y}\operatorname{sen} x - e^y \operatorname{sen} x\right)\,.$$

Por tanto, $\cos x(e^y+e^{-y}) = 0$ y $e^{-y}\operatorname{sen} x - e^y \operatorname{sen} x = 0$. La exponencial real es siempre positiva, asi que $\cos x = 0$. Luego $\operatorname{sen} x \neq 0$, así que $e^{-y} = e^y$ y, por tanto, $y = 0$. Se sigue que los únicos ceros de la función compleja coseno son los ceros reales de la función coseno real, $z = \pi n + \frac{\pi}{2}$, para n entero. (Otro método de solución es posible y se verá en la siguiente entrega.) ■

Dejamos como ejercicio identificar los ceros de la función seno. ¿Qué respuesta cabe esperar?

Definición. Las funciones *coseno* y *seno hiperbólico* se definen, respectivamente, por las fórmulas análogas a las funciones reales: $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$, $\operatorname{senh} z = (e^z - e^{-z})/2$ para $z \in \mathbb{C}$.

Es fácil comprobar que $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$ y $(\operatorname{senh} z)' = \cosh z$, por ejemplo, usando la regla de la cadena. También es fácil comprobar que $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ para todo z.

Desarrollo en serie de algunas funciones elementales

Ya hemos visto que toda serie de potencias nos da una función holomorfa. En una de las siguientes entregas de los apuntes, veremos que el recíproco es válido en cierto sentido: toda función holomorfa podrá escribirse como serie de potencias en cierto disco. Como preludio de este tema, veremos los desarrollos de algunas funciones elementales muy sencillas en series de potencias, usando las fórmulas ya conocidas.

Ejercicio 18. *Desarrolle en serie de potencias de z la función* $\dfrac{e^z}{1-z}$ *y determine su radio de convergencia.*

SOLUCIÓN. Evidentemente, $\dfrac{e^z}{1-z} = e^z \cdot \dfrac{1}{1-z}$. El primer factor se puede desarrollar en serie de potencias con radio de convergencia $R_a = +\infty$ y el segundo en serie de potencias con radio de convergencia $R_b = 1$. Por tanto, podemos multiplicar estas series, al menos en el disco unidad ($R = \min\{1, +\infty\} = 1$), obteniendo

$$e^z \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) z^n = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \frac{65}{24}z^4 + \dots,$$

una serie convergente para $|z| < 1$. ■

Ejercicio 19. *Desarrolle en serie de potencias de z la función* $f(z) = \dfrac{z}{2+z}$ *y determine su radio de convergencia.*

SOLUCIÓN. La idea es usar la fórmula ya conocida para la serie geométrica. Empezamos con unas manipulaciones algebraicas para ajustar la forma de la función f a la forma deseada:

$$f(z) = \frac{z}{2+z} = \frac{z}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{z}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}.$$

La función $\frac{1}{1-w}$ es igual a la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ cuando $|w| < 1$ (que ya sabemos cómo converge). Por tanto,

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

cuando $|-\frac{z}{2}| < 1$, es decir, cuando $|z| < 2$. Como caso especial del corolario del Teorema de Mertens, cuando una de las series es un polinomio (o mediante un razonamiento directo, multiplicando una serie convergente por una función acotada), si multiplicamos esta serie por $z/2$, obtendremos una serie convergente en el mismo conjunto y en el mismo sentido (abstolutamente en el mismo disco y uniformemente en los discos cerrados más pequeños centrados en 0), asi que

$$f(z) = \frac{z}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

siendo la última serie convergente absolutamente para $|z| < 2$ y uniformemente para $|z| \le r < 2$. ■

Observación. Observamos de nuevo que la función f del Ejercicio 19 es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Sin embargo, la serie de potencias centrada en el origen que la representa sólo converge en el disco $D(0;2) = \{z : |z| < 2\}$. Se trata de un fenómeno recurrente que volveremos a ver más adelante porque algo parecido pasará con todas las funciones holomorfas. La razón es muy sencilla: $D(0;2)$ es el disco más grande centrado en el origen y contenido en $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20, con la ayuda de José Pedro Moreno