SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS **99-107** (HOJA 9)

99) ¿Cuántos ceros tiene la ecuación $e^z - 4z^n + 1 = 0$ en el disco unidad?

SOLUCIÓN. Consideramos la curva $\gamma = \{z : |z| = 1\}$, la circunferencia unidad, que es el borde del disco unidad. Nos fijamos en el término dominante (el del mayor módulo) en la traza de γ: $-4z^n$, observando que

$$|-4z^n| = 4 > e + 1 \ge e^{|z|} + 1 \ge e^{\operatorname{Re} z} + 1 = |e^z| + 1 \ge |e^z + 1|$$

para todo z con $|z| = 1$, siendo la desigualdad $|-4z^n| > |e^z + 1|$ estricta. Aplicamos el teorema de Rouché a las funciones $f(z) = -4z^n$ y $g(z) = e^z + 1$ y γ la circunferencia unidad para concluir que $f(z)$ y $(f+g)(z) = e^z - 4z^n + 1$ tienen el mismo número de ceros en el dominio interior a γ. Puesto que f tiene n ceros, teniendo en cuenta las multiplicidades, lo mismo pasa con $f + g$, así que la ecuación dada tiene n soluciones en el disco unidad. ■

---

100) Halle el número de ceros de la función holomorfa $f(z) = z^4 - 12z^2 + 15z + i$:
(a) en el disco unidad; (b) en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; (c) en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \ge 2\}$.

SOLUCIÓN. (a) En el borde del disco unidad, que es la circunferencia unidad, de los cuatro sumandos que forman la función, el más grande es el tercero. Por tanto, consideramos las funciones (enteras)

$$F(z) = 15z, \qquad G(z) = z^4 - 12z^2 + i$$

y observamos que, cuando $|z| = 1$, se satisface la desigualdad

$$|F(z)| = |15z| = 15 > 14 = |z|^4 + |12z^2| + |i| \ge |z^4 - 12z^2 + i| = |G(z)|.$$

De nuevo, la desigualdad es estricta. Aplicando el teorema de Rouché, se deduce que en el disco unidad el número de ceros de $f = F + G$ es el mismo que el número de ceros de F, que es obviamente uno.

Es importante hacer la siguiente observación aunque no nos preguntan sobre eso: debido a la desigualdad estricta $|F(z)| > |G(z)|$, es imposible tener la igualdad $F(z_0) + G(z_0) = 0$ en algún punto z_0 de la circunferencia, puesto que entonces se cumpliría $|F(z_0)| = |-G(z_0)| = |G(z_0)|$, en contradicción con la desigualdad establecida. Por tanto, en la circunferencia unidad no hay ceros de la función f. Esta observación será relevante en el siguiente apartado.

(b) Veamos el número de ceros de f en el disco $D(0;2)$. Sea $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\} = \partial D(0;2)$. En esta circunferencia, el término dominante es $-12z^2$, ásí que esta vez consideraremos las funciones (enteras)

$$F(z) = -12z^2, \qquad G(z) = z^4 + 15z + i$$

y observamos que, cuando $|z| = 2$, se satisface la desigualdad

$$|F(z)| = |-12z^2| = 48 > 16 + 30 + 1 = |z|^4 + |15z| + |i| \ge |z^4 + 15z + i| = |G(z)|.$$

Aplicando el teorema de Rouché, se deduce que en el disco unidad el número de ceros de $f = F + G$ es el mismo que el número de ceros de F, que es obviamente dos.

De esos dos ceros, uno está en el disco unidad abierto. Al final del apartado anterior, vimos que en la circunferencia unidad no hay ceros de f. Por tanto, f tiene exactamente un cero en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

(c) Finalmente, observemos que f es un polinomio complejo de grado 4 y, como tal, tiene 4 ceros en el plano, teniendo en cuenta las multiplicidades. Dado que dos ceros se ubican en el disco $D(0;2)$, en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2\}$ tiene que haber otros dos ceros.
Si queremos ser más precisos, podemos razonar de la misma manera que al final del apartado (a) para ver que ningún cero puede pertenecer a la circunferencia $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$. Por tanto, ambos ceros restantes de f, de hecho, están en la corona abierta $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. ■

---

101) Encuentre razonadamente todos los polinomios mónicos: $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ para los cuales $|p(z)| < 1$ para todo z en la circunferencia unidad.

Solución. Veremos que no existe ningún polinomio de estas características. Supongamos lo contrario. Entonces en la circunferencia unidad se cumple $|z| = 1$ y, por tanto,

$$|p(z)| = |z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| < 1 = |z^n|$$

Por el teorema de Rouché, el número de ceros en el disco unidad de z^n (que es n) coincide con el número de ceros de

$$z^n - p(z) = -(a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0),$$

lo cual es imposible, ya que esta nueva función es un polinomio de grado, como mucho, $n-1$ y no puede tener más de $n-1$ ceros en todo el plano. Contradicción. ■

---

102) Determine razonadamente todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tales que:

a) $\operatorname{Re} f(z) \cdot \operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$; **b)** $\operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Solución. Usaremos el Teorema de la aplicación abierta: una función holomorfa en el disco (o en cualquier otro dominio no vacío) es bien constante, bien una aplicación abierta. Para simplificar la notación, emplearemos la notación habitual $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

(a) La condición $uv = 0$ significa que en todo punto de $\mathbb{D}$ se cumple bien $u = 0$, bien $v = 0$. Geométricamente, eso significa que el conjunto $f(\mathbb{D}) \subset \{(u, v) : u = 0\} \cup \{(u, v) : v = 0\}$, la unión de los ejes real e imaginario. Pero la unión de dos rectas no contiene a ningún disco, luego $f(\mathbb{D})$ no puede ser un conjunto abierto. Por tanto, f no es una aplicación abierta, así que es constante. ¿Qué constante puede ser? Cualquier constante puramente real ($C \in \mathbb{R}$) o puramente imaginaria (Ci, con $C \in \mathbb{R}$).

(b) Esta vez, $f(\mathbb{D}) \subset \{(u, v) : u + v = 0\}$, una recta. De nuevo, $f(\mathbb{D})$ no es abierto y f no puede ser una aplicación abierta, así que es constante. Puede ser cualquier constante $C = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a + b = 0$, es decir, cualquier constante de la forma $a - ai = (1 - i)a$, $a \in \mathbb{R}$. ■

---

103) Sea Ω un dominio en el plano y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Use el Principio del módulo máximo o el Teorema de la aplicación abierta para demostrar las siguientes afirmaciones.

a) Si $|f(z)|$ es constante en Ω, entonces f es constante en Ω.

b) Si $\operatorname{Re} f \equiv 0$ en Ω, entonces f es una constante puramente imaginaria.

Solución. (a) Si $|f(z)| = M$ para cierta constante M y para todo $z \in \Omega$, entonces el módulo máximo de f es M y se alcanza en todo Ω. Por el Principio del módulo máximo, f es constante en Ω. La constante debe tener módulo M, es decir, tiene que ser de la forma $C = Me^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$.
Alternativamente, podemos razonar que si $|f(z)| = M$ para cierta constante M y para todo $z \in \Omega$, entonces $f(\Omega) \subset \{w : |w| = M\}$, la circunferencia de centro en el origen y radio M, que obviamente

tiene interior vacío. Por tanto, f no puede ser una aplicación abierta y, según el Teorema de la aplicación abierta, tiene que ser constante.

(b) Esta vez, $f(\mathbb{D})$ es un subconjunto del eje imaginario: $f(\Omega) \subset \{w : \operatorname{Re} w = 0\}$. De nuevo, una recta no contiene discos, luego f no es una aplicación abierta, así que es constante y, obviamente, tiene que ser puramente imaginaria.
Para aplicar el Principio del módulo máximo, en este caso se requiere un poco más de trabajo: podemos considerar la función $g = e^f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Evidentemente, $|g| = e^{\operatorname{Re} f} = 1$. Aplicando la solución con el Principio del módulo máximo del apartado (a), con $M = 1$, se sigue que g es constante. Luego, como en un problema de los apuntes sobre analiticidad, holomorfía y el teorema de Liouville, se deduce que f es constante. ■

---

104) Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y γ un contorno contenido en Ω junto con su dominio interior. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $|f| \equiv 1$ en $\{\gamma\}$, demuestre que entonces bien f tiene algún cero en el interior de γ, bien es constante en Ω.

SOLUCIÓN. Sea D el dominio interior a γ. Entonces $f \in \mathscr{H}(D) \cap C(\overline{D})$. Por la segunda versión del Principio del módulo máximo, para todo $z \in \Omega$ se tiene la desigualdad

$$|f(z)| \le \max_{\overline{D}} |f| = \max_{\{\gamma\}} |f| = 1\,.$$

Si f tiene, al menos, un cero en D, el dominio interior a γ, no hay nada que demostrar. Si no tiene ningún cero en D, entonces $1/f \in \mathscr{H}(D) \cap C(\overline{D})$ y, por las hipótesis sobre f, cumple $|1/f| \equiv 1$ en $\{\gamma\}$. De nuevo, razonando de la misma forma que para f, vemos que para todo $z \in \Omega$ también se tiene $|1/f(z)| \le 1$. Junto con la desigualdad anterior $|f(z)| \le 1$, esto nos dice que $|f(z)| = 1$ en Ω. Finalmente, por el ejercicio anterior, f es constante. ■

---

105) Supongamos que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le |2 - z|$, para todo $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Demuéstrese que $\left|f\left(\frac{2}{3}\right)\right| \le \frac{8}{9}$. ¿Para qué funciones se tiene la igualdad?

SOLUCIÓN. Si $z \in \mathbb{D}$, entonces $|2-z| \ge 2-|z| > 2-1 > 0$, asi que $2-z \ne 0$. Por tanto, $g(z) = f(z)/(2-z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y, por hipótesis, cumple $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
Además, $g(0) = f(0)/2 = 0$ y podemos aplicar el Lema de Schwarz para concluir que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$; en otras palabras, $|f(z)| \le |z||2-z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, para $z = \frac{2}{3}$, se obtiene $\left|f\left(\frac{2}{3}\right)\right| \le \frac{8}{9}$.
La igualdad sólo es posible cuando $g(z) = \lambda z$, para cierto λ con $|\lambda| = 1$, es decir, para las funciones $f(z) = \lambda z(2-z)$, con $|\lambda| = 1$. ■

---

106) Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = f'(0) = 0$. Demuestre que $|f(z)| \le |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

SOLUCIÓN. Consideremos la función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ f'(0) = 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Puesto que

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0) = g(0)\,,$$

la función g tiene una singularidad evitable en el origen y es continua en ahí. Por tanto, $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Además, podemos aplicar el Lema de Schwarz a f para deducir que $|f(z)| \le |z|$ en $\mathbb{D}$. Por consiguiente,

$$|g(z)| \le 1 \text{ en } \mathbb{D} \quad \text{y} \quad g(0) = 0$$

Aplicando de nuevo el Lema de Schwarz pero esta vez a la función g, obtenemos que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Cuando $z \neq 0$, esto implica que $|f(z)| \le |z|^2$. Para $z = 0$, esta desigualdad se cumple trivialmente (es una igualdad). ■

---

107) a) Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ una función con las siguientes propiedades: $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $f(a) = 0$ para un punto $a \in \mathbb{D}$. Demuestre que entonces $|f'(a)|(1-|a|^2) \le 1$. Estudie cuándo se tiene la igualdad.

b) Halle una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ y $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}i$.

SOLUCIÓN. (a) Para poder aplicar el Lema de Schwarz, necesitamos una función holomorfa en el disco que mande el disco al disco y fije el origen (f cumple todo menos lo último). Por tanto, recurrimos al mismo procedimiento que en los apuntes, definiendo $g = f \circ \varphi_a$, donde φ_a es el automorfismo involución correspondiente al punto a, como en los apuntes: $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$.
Puesto que $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, es inmediato que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. También es claro que $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ como composición de dos funciones holomorfas. Finalmente, $g(0) = f(\varphi_a(0)) = f(a) = 0$. La segunda conclusión del Lema de Schwarz nos dice que $|g'(0)| \le 1$, pero la regla de la cadena y la fórmula para la derivada de φ_a (fácil de calcular) del Ejercicio 10 de los últimos apuntes nos dicen que

$$g'(0) = f'(\varphi_a(0))\varphi_a'(0) = -(1-|a|^2)f'(a)$$

y se sigue la afirmación del apartado.
La igualdad se puede cumplir para aquellas g que cumplan la igualdad en el Lema de Schwarz: $g(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$. Por tanto, debe cumplirse $\lambda z = f(\varphi_a(z))$, para todo $z \in \mathbb{D}$. En lugar de un z arbitrario podemos sustituir $\varphi_a(z)$ en esta igualdad, ya que φ_a es sobreyectiva, obteniendo:

$$\lambda\varphi_a(z) = f(\varphi_a(\varphi_a(z))) = f(z),$$

así que finalmente $f(z) = \lambda\varphi_a(z)$, $|\lambda| = 1$.
(b) Buscamos una función que satisfaga la igualdad en la desigualdad del aparatado anterior, con $a = \frac{1}{2}$. Por tanto, necesitamos que se cumpla

$$f(z) = \lambda\varphi_{\frac{1}{2}}(z) = \lambda\frac{\frac{1}{2} - z}{1 - \frac{1}{2}z} = \lambda\frac{1-2z}{2-z}$$

para un λ adecuado de módulo 1. Es fácil comprobar, después de calcular la derivada, que se tiene que satisfacer la condición $-\frac{4}{3}\lambda = \frac{4}{3}i$ y, por tanto, $\lambda = -i$. ■
