Variable Compleja I CURSO 2019-20, UAM

SOLUCIONES/RESPUESTAS: HOJA 8 (PROBLEMAS **92-94**)

92) Clasifique las singularidades de las siguientes funciones por su tipo:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{z^2+2z+1}\,; \qquad \textbf{b)}\ \frac{1+z}{1-\cos z}\,; \qquad \textbf{c)}\ \frac{z^2}{\operatorname{sen} z}\,; \qquad \textbf{d)}\ \operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\,.$$

Después calcule los residuos correspondientes.

SOLUCIÓN. **a)** $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+1} = \dfrac{1}{(z+1)^2}$ tiene un polo doble en $z=-1$.
El residuo se puede calcular de dos formas. La más directa es observando que f está expresada como serie de Laurent:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z+1)^n\,,$$

en cualquier corona $\{z : 0 < |z-1| < R$ (la suma es finita y siempre converge), donde $c_n = 0$ para todo $n \neq -2$. Por la Proposición 5 de los apuntes sobre singularidades y series de Laurent, $\operatorname{Res}(f;-1) = c_{-1} = 0$.
La otra forma consiste en aplicar la Proposición 4 de los apuntes:

$$\operatorname{Res}(f;-1) = \lim_{z\to-1} [(z+1)^2 f(z)]' = 0\,.$$

b) Las singularidades de la función se encuentran entre los ceros de la ecuación $1-\cos z = 0$, que son $\{z_k = 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, como ya hemos visto en varias ocasiones. Todas son singularidades aisladas y el numerador no se anula en ninguna de ellos, así que todas estas singularidades son polos. Además, son polos dobles, lo cual se puede ver de dos maneras. Una forma de verlo es viendo que son ceros dobles del denominador:

$$(1-\cos z)'|_{z=z_k} = \operatorname{sen} z_k = 0\,, \qquad (1-\cos z)''|_{z=z_k} = \cos z_k = 1 \neq 0\,,$$

La otra, como en los apuntes, es viendo que

$$\lim_{z\to z_k} (z-z_k)\frac{1+z}{1-\cos z} = \infty\,, \qquad \lim_{z\to z_k} (z-z_k)^2 \frac{1+z}{1-\cos z} \neq 0,\, \infty\,.$$

Por supuesto, esto se puede ver aplicando la Regla de L'Hôpital. También se puede comprobar usando el desarrollo de la función coseno en serie de potencias de $z-a_k$, de forma muy parecida a la que indicamos a continuación, en el cálculo de residuos.
En cuanto a los residuos, según la Proposición 4 de los apuntes:

$$\operatorname{Res}(f;z_k) = \lim_{z\to z_k} [(z-z_k)^2 f(z)]' = \lim_{z\to z_k} \left[\frac{(z-z_k)^2(1+z)}{1-\cos z}\right]'\,.$$

Este límite se podría calcular usando el cambio de variable $w = z - z_k$, la periodicidad del coseno (con periodo 2π): $\cos z = \cos w$ y la regla de L'Hôpital (varias veces) pero eso sería un poco engorroso, quizás tanto como el Ejercicio 3 de los apuntes 8 (sobre el Teorema de los residuos).
He aquí un método alternativo que no se ha destacado en los apuntes pero es muy efectivo y es otra técnica importante que conviene dominar. Aludimos a él en la primera parte de este apartado. Se basa en el desarollo en serie de Taylor. Ya sabemos de unos apuntes anteriores (de nuevo, sirviéndonos de la periodicidad del coseno) que

$$\cos z = \cos(z-z_k) = 1 - \frac{1}{2!}(z-z_k)^2 + \frac{1}{4!}(z-z_k)^4 - \frac{1}{6!}(z-z_k)^6 + \ldots$$

y esta serie de Taylor converge uniformemente en todo el plano. Por tanto, lo mismo ocurre con

$$1-\cos z=\frac{1}{2!}(z-z_k)^2-\frac{1}{4!}(z-z_k)^4+\frac{1}{6!}(z-z_k)^6-\dots$$

Después de dividir por $(z-z_k)^2$, queda una singularidad evitable en $z=z_k$ (porque la nueva serie de potencias tiene el mismo radio de convergencia que la anterior), así que en la siguiente fórmula seguimos teniendo un desarrollo en serie que converge uniformemente:

$$\frac{1-\cos z}{(z-z_k)^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}(z-z_k)^2+\frac{1}{6!}(z-z_k)^4-\dots$$

Por tanto,

$$\frac{(z-z_k)^2(1+z)}{1-\cos z}=\frac{1+z}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}(z-z_k)^2+\frac{1}{6!}(z-z_k)^4-\dots}$$

siendo la serie en el cociente convergente en todo el plano. Además, por todo lo expuesto, el denominador es distinto de cero en todo el plano (los ceros ya están cancelados) y con la serie uniformemente convergente en un entorno suficientemente pequeño de cualquier z_k. Podemos proceder a derivar la expresión, aplicando la regla del cociente (y el teorema de derivación término a término de una serie de potencias en su disco de convergencia):

$$\begin{aligned}\left[\frac{(z-z_k)^2(1+z)}{1-\cos z}\right]' &= \left[\frac{1+z}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}(z-z_k)^2+\frac{1}{6!}(z-z_k)^4-\dots}\right]'\\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}(z-z_k)^2+\frac{1}{6!}(z-z_k)^4-\dots\right)-(1+z)\left(-\frac{2}{4!}(z-z_k)+\frac{4}{6!}(z-z_k)^3-\dots\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}(z-z_k)^2+\frac{1}{6!}(z-z_k)^4-\dots\right)^2}.\end{aligned}$$

Para cualquier z_k concreto, las series que aparecen en la fracción a la derecha convergen uniformemente en un entorno suficientemente pequeño de dicho punto. Por un teorema conocido de una entrega anterior de apuntes, dado que la convergencia es uniforme, tomando el límite cuando $z\to z_k$, podemos intercambiar el límite y la serie, obteniendo finalmente

$$\operatorname{Res}(f;z_k)=\lim_{z\to z_k}\left[\frac{(z-z_k)^2(1+z)}{1-\cos z}\right]'=\frac{\frac{1}{2}-0}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2\,.$$

c) Las singularidades de $f(z)=\frac{z^2}{\operatorname{sen} z}$ son los ceros del denominador: $\{z_k=\pi k\,:\,k\in\mathbb{Z}\}$.
Hay una gran diferencia entre $z_0=0$ y el resto de las singularidades. A saber, puesto que

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\operatorname{sen} z}=\lim_{z\to 0} z\frac{z}{\operatorname{sen} z}=0\cdot 1=0\,,$$

la singularidad en $z_0=0$ es evitable y, por tanto, $\operatorname{Res}(f;0)=0$.
Todas las demás singularidades son polos puesto que el numerador no se anula en ningún $z_k=\pi k$ para $k\neq 0$ y el denominador sí. Son polos simples, dado que cada z_k es un cero simple del denominador:

$$\operatorname{sen} z_k=0\,,\qquad (\operatorname{sen} z)'(z_k)=\cos z_k=\cos\pi k=(-1)^k\neq 0\,.$$

Para calcular los residuos en estos polos simples, usamos de nuevo la Proposición 4:

$$\operatorname{Res}(f;z_k)=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)z^2}{\operatorname{sen} z}=\lim_{z\to z_k}\frac{3z^2-2z_kz}{\cos z}=\frac{z_k^2}{\cos z_k}=\frac{\pi^2k^2}{(-1)^k}=(-1)^k\pi^2k^2\,.$$

d) La única singularidad es $z=0$ ya que, por la Regla de la cadena, la función tiene derivada compleja en todos los demás puntos.
Sabiendo que el comportamiento de las funciones complejas seno y coseno cerca del infinito es similar al de la función exponencial y que $e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en el origen, ya podemos intuir que nuestra función también tendrá una singularidad esencial en el origen pero lo vamos a comprobar formalmente. Usando el desarollo en serie de Taylor de la función seno:

$$\operatorname{sen} z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\,.$$

y sustituyendo z por $1/z^2$ (para $z \neq 0$), obtenemos directamente

$$\operatorname{sen}\frac{1}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2(2k+1)}} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \dots .$$

Hemos obtenido el desarrollo de f en serie de Laurent válido para todo $z \neq 0$ y, por tanto, convergente en la corona $\{z : 0 < |z| < \infty\}$, con

$$c_{-2} = 1\,, \quad c_{-4} = -\frac{1}{6}\,, \quad c_{-10} = \frac{1}{120}\,, \dots$$

y el resto de los $c_n = 0$. Como vemos, la parte principal de la serie tiene infinitos términos no nulos y, por tanto, la singularidad en $z = 0$ es esencial y $\operatorname{Res}(f;0) = c_{-1} = 0$. ■

---

93) Sean f y g dos funciones holomorfas en $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < r\}$. Demuestre que si f tiene un cero de orden n y g tiene un cero de orden $n+1$ en el punto a, entonces f/g tiene un polo simple en a. Calcule el residuo $\operatorname{Res}(f/g;a)$.

SOLUCIÓN. Si f tiene un cero de orden n en $z = a$, entonces existe una función φ holomorfa en un entorno de dicho punto tal que $f(z) = (z-a)^n\varphi(z)$ y $\varphi(a) \neq 0$. Si g tiene un cero de orden $n+1$ en $z = a$, entonces existe una función ψ holomorfa en un entorno de dicho punto tal que $g(z) = (z-a)^{n+1}\psi(z)$ y $\psi(a) \neq 0$. Por tanto, en un entorno agujereado de $z = a$ (por ejemplo, en la intersección de los dos entornos mencionados menos en el punto a) tenemos que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^n\varphi(z)}{(z-a)^{n+1}\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-a)\psi(z)}\,.$$

Puesto que $\varphi(a) \neq 0$ y $\psi(a) \neq 0$, se sigue inmediatamente que $z = a$ es un polo simple de f/g; por ejemplo, considerando los límites

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty\,, \qquad \lim_{z\to a} \frac{(z-a)f(z)}{g(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \neq 0,\ \infty.$$

Además, por la fórmula para el residuo en un polo simple (Proposición 4), obtenemos que $\operatorname{Res}(f;a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$. ¿Cómo expresamos esta cantidad explícitamente en función de f y g, sin pasar por funciones auxiliares? De nuevo, usando los desarrollos de ambas funciones en series de Taylor, obtenemos primero

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = (z-a)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}\,,$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = (z-a)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n-1}\,,$$

y luego, intercambiando el límite cuando $z \to a$ y la serie (debido a la convergencia uniforme):

$$\frac{(z-a)f(z)}{g(z)} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}}{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n-1}} = \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \dots}{\frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \frac{g^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z-a) + \dots} \to \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}{\frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)f^{(n)}(a)}{g^{(n+1)}(a)}$$

cuando $z \to a$. Finalmente, tenemos la fórmula

$$\operatorname{Res}(f;a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{(n+1)f^{(n)}(a)}{g^{(n+1)}(a)}\,. \qquad ■$$

---

94) Halle los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones en las coronas indicadas:

a) $\cos\frac{1}{z}$, $\quad 0 < |z| < +\infty$, $\qquad$ **b)** $z^2 e^{1/(1-z)}$, $\quad 0 < |z-1| < +\infty$; $\qquad$ **c)** $\frac{1}{z(z-1)}$, $\quad 1 < |z| < +\infty$.

SOLUCIÓN. **a)** Usando el desarollo en serie de Taylor de la función coseno:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots .$$

y sustituyendo z por $1/z$ (para $z \neq 0$), obtenemos el desarrollo válido en $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$:

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)! z^{2k}} = 1 - \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{4! z^4} - \dots .$$

Obviamente, la singularidad en $z = 0$ es esencial y $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$.

b) Desarrollamos los dos factores en potencias de $z-1$, obteniendo

$$z^2 = (1 + (z-1))^2 = 1 + 2(z-1) + (z-1)^2, \qquad e^{1/(1-z)} = 2e^{-\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n},$$

donde ambas series convergen si $z \neq 1$. Multiplicando y después cambiando el índice en dos de las tres sumas, agrupando los términos con las mismas potencias negativas de $z-1$ y sumando aparte los términos sueltos con potencias positivas $z-1$ y $(z-1)^2$, observando que $(-1)^{n+2} = (-1)^n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
z^2 e^{1/(1-z)} &= \left(1 + 2(z-1) + (z-1)^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n!(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^{n-2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)!(z-1)^n} + \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!(z-1)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^n}{(n+2)!} \right] \frac{1}{(z-1)^n} + 2(z-1) - (z-1) + (z-1)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \frac{1}{(z-1)^n} + (z-1) + (z-1)^2 \\
&= (z-1)^2 + (z-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 + n - 1)}{(n+2)!} \frac{1}{(z-1)^n} .
\end{aligned}$$

De nuevo, la singularidad en $z = 0$ es esencial y $\operatorname{Res}(f; 1) = -\frac{1}{6}$.

c) Cuando $1 < |z| < +\infty$, se sigue que $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, así que podemos usar el desarrollo en serie geométrica (convergente para los valores indicados) como sigue:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}} \qquad \blacksquare$$

Preparado por José Pedro Moreno y Dragan Vukotić, profesores de la asignatura en 2019-20