SOLUCIONES/INDICACIONES: HOJA 8 (PROBLEMAS **95-98**)

95) Calcule las siguientes integrales:

$$\text{(i)} \int_{|z|=1} \frac{1+z}{1-\cos z}\, dz, \qquad \text{(ii)} \int_{\gamma} z^n e^{1/z}\, dz,$$

sabiendo que en (ii) γ es un contorno (orientado positivamente) alrededor del origen y n es un número natural.

SOLUCIÓN. (i) Ya sabemos del Problema **92** que las singularidades aisladas de $f(z) = \frac{1+z}{1-\cos z}$ son $z_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ y el residuo en cada una de ellas es $\operatorname{Res}(f; z_k) = 2$. Ninguna de las singularidades está en la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$ (por tanto, f es integrable allí, por ser holomorfa y, en particular, continua) y sólo una de ellas: $z_0 = 0$ está dentro de la circunferencia. Por el Teorema de los residuos (o por la Fórmula integral de Cauchy), se sigue que

$$\int_{|z|=1} \frac{1+z}{1-\cos z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;0) = 4\pi i.$$

(ii) La única singularidad del integrando $f(z) = z^n e^{1/z}$ es $z = 0$, puesto que f es derivable en los demás puntos en virtud de la regla del producto y la regla de la cadena. El desarrollo en serie de Laurent en la corona $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ se obtiene a partir del desarrollo de Taylor de la función exponencial:

$$\begin{aligned} z^n e^{1/z} &= z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k = z^n \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \frac{1}{(n+1)!z^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!z^{n+2}} + \ldots\right) \\ &= z^n + z^{n-1} + \frac{z^{n-2}}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!z} + \frac{1}{(n+2)!z^2} + \ldots \end{aligned}$$

De la serie de Laurent obtenida se desprende que $\operatorname{Res}(f;0) = \frac{1}{(n+1)!}$. ■

---

96) Calcule las siguientes integrales trigonométricas usando la integración sobre la circunferencia unidad y la fórmula integral de Cauchy (o el teorema de los residuos):

$$\textbf{a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt, \qquad \textbf{b)} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+a}}, \quad a > 0.$$

SOLUCIÓN. En ambos apartados, podemos aplicar el método ya explicado en los apuntes sobre el Teorema de los residuos y sus aplicaciones (entrega 8), en el texto previo al Ejercicio 4 y en el desarrollo de dicho ejercicio, donde la integral real sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ se convirte en la integral compleja sobre $\mathbb{T}$, la circunferencia unidad con orientación positiva. Escribiendo cada punto $z \in \mathbb{T}$ con $|z| = 1$ como

$$z = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

obtenemos $dt = \frac{dz}{iz}$ y

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad \operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = -\frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

a) La integral se convierte en

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt = \int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i}\int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{z^2+4z+1} = -2i \int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

donde $a = -2-\sqrt{3}$ y $b = -2+\sqrt{3}$. Sólo uno de los polos del integrando, $z = b$, está dentro de $\mathbb{T}$ ya que $|a| = 2+\sqrt{3} > 2 > 1$ y $|b| = 2-\sqrt{3} < 1$. Por tanto, podemos aplicar tanto la Fórmula integral de Cauchy como el Teorema de los residuos para concluir que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt = -2i \int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = -2i \cdot 2\pi i \frac{1}{b-a} = \frac{4\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

El apartado **b)** es similar. ■

---

97) Use el contorno adecuado y el teorema de los residuos para deducir las siguientes fórmulas:

$$\textbf{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+81} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}, \qquad \textbf{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+81} = \frac{\pi\sqrt{2}}{54}.$$

SOLUCIÓN. Seguimos el método de los ejercicios 5 y 6 de los apuntes. La segunda integral es muy similar y más fácil, así que sólo repasaremos la primera. Consideraremos la función racional

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+81}$$

cuyo denominador se anula en las raíces de la ecuación $z^4+81=0$, que son las raíces cuartas del número $-81 = 3^4 e^{\pi i}$ (¡los primeros temas no se deben olvidar!). Por tanto, son los siguiente valores:

$$z_1 = 3e^{\pi i/4} = \frac{3}{\sqrt{2}}(1+i),\ z_2 = 3e^{3\pi i/4} = \frac{3}{\sqrt{2}}(-1+i),\ z_3 = 3e^{5\pi i/4} = -\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i),\ z_1 = 3e^{7\pi i/4} = \frac{3}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Todos estos ceros del denominador son polos simples de f.
Como en los apuntes, es conveniente escoger el contorno más habitual, $\gamma_R = [-R,R] \cup C : R$, siendo C_R la semicircunferencia desde R hasta $-R$, recorrida una sola vez y situada en el semiplano superior. En el dominio interior a γ_R sólo se encuentran dos de los polos: z_1 y z_2 y, por el Teorema de los residuos:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f;z_1) + \text{Res}(f;z_2)\right).$$

Usando un lema formulado al final de los apuntes sobre las integrales de línea y las estimaciones para ellas, cuando f es una función racional con el grado del denominador, al menos, el grado del numerador más dos, como es el caso, se sigue que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

Por tanto, concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+81} = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f;z_1) + \text{Res}(f;z_2)\right).$$

Recordando que $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_3)}$, los residuos en los polos simples z_1 y z_2 se calculan de forma habitual, por ejemplo:

$$\text{Res}(f;z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{z^2}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_3)} = \frac{z_1^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_3)}$$

etc. Omitimos los detalles.
Por supuesto, también se puede elegir un contorno con la semicircunferencia contenida en el semiplano inferior, dentro del cual están sólo los polos z_3 y z_4. Los cálculos son similares. ■

---

98) Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}$, justificando la respuesta detalladamente.

SOLUCIÓN. El método de resolución de este ejercicio es el mismo que el utilizado en los ejercicios 7 y 8 de los apuntes sobre el Teorema de los residuos y sus aplicaciones (entrega 8). Hay que integrar la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

sobre el contorno γ_R habitual. ■

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20