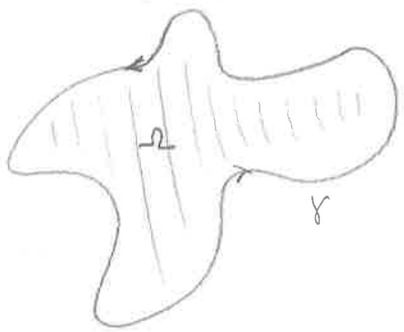
84:) γ contorno (curva simple y cerrada, C^1 a trozos) que encierra una región de área S. Entonces $S = \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\, dz$.



Por el ejercicio 1 de los apuntes,

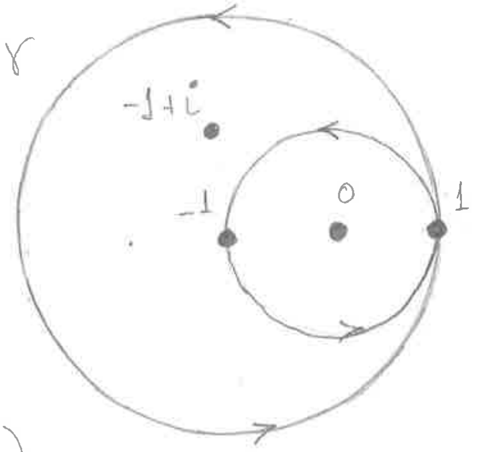
$$\int_\gamma \overline{f(z)}\, dz = 2i \iint_\Omega \overline{f'(z)}\, dx\,dy$$

de modo que

$\int_\gamma \bar{z}\, dz = 2i \iint_\Omega dx\,dy = 2i\, S$, de donde se deduce el resultado.

85:) Todas las integrales son 0, por el teorema integral de Cauchy.

86:) a) $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \mathrm{Ind}_\gamma(0) = 4$



b) $\int_\gamma \frac{1}{z+1-i} = \mathrm{Ind}_\gamma(-1+i) = 3$

87:) a) $\int_\gamma e^{-z}\, dz = \int_0^{-i} e^{-z}\, dz = -e^{-(-i)} - (-e^{0})$

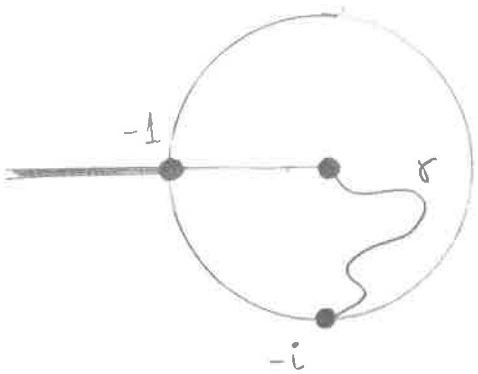
$= -(\cos 1 + i \,\mathrm{sen}\, 1) + 1$

(versión compleja del teorema fundamental del cálculo).

b) $\int_\gamma \frac{dz}{z+1} = \int_0^{-i} \frac{dz}{z+1}$ La función $F(z) = \log(z+1)$

$= \ln|z+1| + i\,\mathrm{Arg}(z+1)$

es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-1]\}$



$\| \to F(-i) - F(0) = \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} - \log 1$

$= \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$

90.) $f \in \mathcal{H}(D(1;1))$ tales que $f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1} = \frac{2n^2+2n}{2n^2+2n+1}$

La dificultad estriba en que buscamos una expresión $f(z) = \dots$ donde los puntos suspensivos indican una expresión que depende de z.
Entonces, escribimos $\frac{z}{z+1} = w$ y, tras algún cálculo, obtenemos que $z = \frac{w}{1-w}$. A continuación, en la expresión $g\left(\frac{z}{z+1}\right) = \frac{2z^2+2z}{2z^2+2z+1}$

ponemos todo en función de w:

$$g(w) = \frac{2\frac{w^2}{(1-w)^2} + 2\frac{w}{1-w}}{2\frac{w^2}{(1-w)^2} + 2\frac{w}{1-w} + 1} = \frac{2w^2 + 2w(1-w)}{2w^2+2w(1-w)+(1-w)^2} = \frac{2w}{w^2+1}$$

Hay que usar un argumento ahora basado en el principio de unicidad pero omitimos los detalles (ver los apuntes); $g \in \mathcal{H}(D(1,1))$ y coincide con f en $\{z_n\} \to 1$.

88.) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$. La primera igualdad implica (principio de unicidad) que $f(z) = z$ mientras que la segunda implica $f(z) = -z$, lo que nos lleva a que $z = -z$ $\forall z \in \mathbb{C}$, cosa que es falsa.

89.) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f(z) = f(z^2)$; fijamos $w \in \mathbb{C}$ con $|w| < 1$. Entonces

$$f(w) = f(w^2) = f((w^2)^2) = \dots = f\left(w^{2^n}\right) = \dots = f(0)$$

La última igualdad es por continuidad, dado que $\{w^{2^n}\} \to 0$. Por tanto, $f(z) \equiv f(0)$ (principio de unicidad).

91.) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left(\frac{1}{n}\right)^k \left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}$ lo cual implica que

$$\left|g\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$ y esto, a su vez, significa que

$$|g(0)| = \lim_n \left|g\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| \leq \lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = 0$$ contradicción