44.) Una función real $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica cuando es de clase C^2 y verifica $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. En nuestro caso

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

es C^2 para cualquier $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Con respecto a Δu, tenemos

$$u_x = 3ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad u_{xx} = 6ax + 2by$$

$$u_y = bx^2 + 2cxy + 3dy^2, \qquad u_{yy} = 2cx + 6dy$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 6ax + 2cx + 2by + 6dy$$

$$0 = x(3a+c) + y(b+3d)$$

de manera que $c = -3a$, $b = -3d$ ya que, de otro modo, el conjunto $\{(x,y) : \Delta u(x,y) = 0\}$ sería una recta en $\mathbb{R}^2$. Por tanto

$$u(x,y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$$

Si nos pidiesen encontrar $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $u = \operatorname{Re} f$, entonces usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = 3ax^2 - 6dxy - 3ay^2 = v_y$$

luego

$$v(x,y) = 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + C(x)$$

ahora

$$\left.\begin{array}{rl} -u_y = & 3dx^2 + 6axy - 3dy^2 \\ \| & \\ v_x = & 6axy - 3dy^2 + C'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow C(x) = dx^3 + k$$

$$\Rightarrow f(x+iy) = (ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3) + i(3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + dx^3) + k$$

Veamos si se puede expresar de forma más estética.

Si $y=0$, $f(x) = ax^3 + idx^3 + k = x^3(a+id) + k$.

Definamos $\boxed{g(z) = z^3(a+id) + k}$ Resulta que

$$f|_{\mathbb{R}} = g|_{\mathbb{R}} \xRightarrow{\hphantom{xxx}} f \equiv g$$

¡magia! = (principio de identidad)

46.) Funciones armónicas de la forma $u(x,y) = g(ax+b)$, $g \in C^2(\mathbb{R})$

a) Empezamos recordando cómo se deriva u:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & ax+b & \longrightarrow & g(ax+b) \end{array}$$

Usando la regla de la cadena, tenemos $\nabla u(x,y) = g'(f(x,y))\nabla f(x,y)$ de manera que $u_x = g'(ax+by)\cdot a$, $u_y = g'(ax+by)\cdot b$

$u_{xx} = g''(ax+by)a^2$, $u_{yy} = g''(ax+by)b^2$

$u_{xx} + u_{yy} = (a^2+b^2)g''(ax+by) = 0$. Hay dos posibilidades:

$a^2+b^2 = 0 \Rightarrow u = cte$

$a^2+b^2 \neq 0 \Rightarrow g''(ax+by) = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{C}$. Si hacemos $ax+by = t$ resulta $g''(t) = 0 \Rightarrow g(t) = \alpha t + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Luego $u(x,y) = \alpha(ax+by) + \beta$. Para calcular su conjugada armónica, usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $-u_y = v_x \Rightarrow$

$\alpha a = v_y \Rightarrow v = \alpha a y + K(x)$, $\alpha b = -v_x = -K'(x)$, $\Rightarrow$

$v(x,y) = \alpha a y - \alpha b x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) $u = h(x^2+y^2)$, $h \in C^2(\mathbb{R})$, $u_x = h'(x^2+y^2)2x$,

$$\left.\begin{array}{l} u_{xx} = h''(x^2+y^2)4x^2 + 2h'(x^2+y^2) \\ u_{yy} = h''(x^2+y^2)4y^2 + 2h'(x^2+y^2) \end{array}\right\} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow$$

$4(x^2+y^2)h''(x^2+y^2) + 4h'(x^2+y^2) = 0$. Si hacemos $x^2+y^2 = t$, resulta $th''(t) + h'(t) = 0$. Para resolver esta ecuación diferencial, hacemos $z = h'$ y usamos separación de variables: $t\dfrac{dz}{dt} = -z$, $-\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dt}{t}$

integrando a ambos lados, tenemos $\ln z = -\ln t + C_1$, $z = \dfrac{K_1}{t}$

siendo $K_1 \equiv cte$. Ahora, $h'(t) = \dfrac{K_1}{t} \Rightarrow h(t) = K_1 \ln t + K_2$.-

Para calcular el radio de convergencia de una serie $\sum a_n (z-a)^n$ además de la definición $R = \left(\overline{\lim} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$ hay que usar en algunas ocasiones que

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{(criterio del cociente)}$$

cuando este límite existe.

48.) $\sum_{n=1} n! \frac{z^n}{n^n}$, $\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$= \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

$\sum_{n=0} \cos(in) z^n$ aquí la dificultad estriba en que aún no hemos definido el coseno complejo, pero admitamos de momento esta fórmula:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

de donde resulta

$$\cos(in) = \frac{e^{-n} + e^{n}}{2}$$

y usando el criterio del cociente

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{e^{-n} + e^{n}}{2} \cdot \frac{2}{e^{-(n+1)} + e^{n+1}} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{e}$$

$\sum_{n=0} (n+a^n) z^n$, $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{|n+a^n|}{|(n+1)+a^{n+1}|} \xrightarrow[n]{} \begin{cases} 1 & \text{si } |a| \leq 1 \\ \frac{1}{|a|} & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$

$$\sum_{n=0} a^{n^2} z^{1+2+\dots+n} = \sum_{n=0} a^{n^2} z^{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{k=0} b_k z^k \quad \text{siendo}$$

$$b_k = \begin{cases} a^{n^2} & \text{si } k = \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; \text{ entonces, } \overline{\lim_k} |b_k|^{1/k} = \lim_n \left(a^{n^2}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}} = a^2$$

54.) $f(z) = \text{sen}(e^z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ por ser composición de dos funciones holomorfas en $\mathbb{C}$

$g(z) = \cos \bar{z} = \frac{1}{2}(e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}})$ podemos utilizar el problema 40.b) que establece que si $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω dominio simétrico, entonces $g = h(\bar{z})$ es derivable en $a \in \Omega$ si y solo si $g'(\bar{a}) = 0$. En nuestro caso, $g'(\bar{a}) = \cos'(\bar{a}) = -\text{sen}\,\bar{a} = 0$

Hay que resolver la ecuación $\text{sen}\,\bar{z} = \frac{1}{2i}(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}) = 0$.

$e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}} = 0$, $\quad e^{i\bar{z} + i\bar{z}} - 1 = 0$, $\quad e^{2i\bar{z}} = 1$

$e^{2i(x-iy)} = 1$, $\quad e^{2y} \cdot e^{2ix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Obsérvese que si la pregunta hubiera sido relativa a la función $e^{\bar{z}} = g(z)$, la respuesta sería que g no es derivable en ningún punto porque $e^z = 0$ no tiene solución.

$h(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, será derivable cuando $e^z - 1 \neq 0$

$e^z = e^x e^{iy} = 1 \iff \begin{cases} e^x = 1 \iff x = 0 \\ y = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Obsérvese que, al contrario que la exp. real, la exp. compleja no es inyectiva.

$g(z) = \frac{1}{e^z - e^{-z}}$, $\quad e^z = e^{-z} \iff \begin{cases} x = -x \iff x = 0 \\ y = -y + 2k\pi \iff y = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

55.) Para desarrollar en serie de potencias el producto de dos funciones, conviene tener en cuenta que si $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ tienen radio de convergencia $\geq r > 0$ entonces $\sum c_n z^n$ tiene radio de convergencia $\geq r$, siendo $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Además, $\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n$ si $|z| < r$.

(ver detalles de la prueba en apuntes de D. Vukotic).

$$f(z) = (1-z)\cos z = (1-z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}(-1)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left((-1)^n z^{2n} + (-1)^{n+1} z^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ par} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+1}}{n-1!} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = \overline{\lim} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = 0$$

. Obs: No se puede aplicar el criterio del cociente (¿por qué?)

$$g(z) = \frac{e^{-z}}{1+z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_n z^k, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(-1)^{n-k}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$\overline{\lim} |c_n|^{1/n} \leq 1$

porque $|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e \Rightarrow \overline{\lim} |c_n|^{1/n} \leq \lim e^{1/n} = 1$

$\overline{\lim} |c_n|^{1/n} \geq 1$ porque $|c_n| \geq 1 \ \forall n$.

$$h(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{1-z^2} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right)\left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots\right)$$

$$= z + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)z^3 + \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right)z^5 + \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\right)z^7 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1!}\right)}_{c_n} z^{2n+1}$$

$\lim_n c_n := c > 0 \Rightarrow \overline{\lim} |c_n|^{1/n} = 1$

La exponencial compleja $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, a semejanza de la exponencial real, satisface $e^z = \lim_n \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ siendo la convergencia uniforme en $\{|z| \leq R < \infty\}$, $\forall R>0$.

Para probarlo, empezamos fijando $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$. Queremos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \right| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$, $|z| \leq R$. La idea consiste en usar la fórmula del binomio para aproximar $\sum_{k=0}^{n_0} \frac{z^k}{k!}$ y luego estimar aparte las dos colas restantes.

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \frac{z^k}{k!}$$

siendo $0 < \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \leq 1$ $\forall k = 0, \dots, n$. Entonces, si $n \geq n_0$ y $|z| \leq R$,

$$\left| e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right) \frac{R^k}{k!}$$
$$+ \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \frac{R^k}{k!}$$

de estos tres sumandos, el segundo y el tercero están acotados por $\varepsilon/3$, así que sólo hay que preocuparse del primero. Podemos encontrar $n_1 > n_0$ tal que $\left| 1 - \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \right| \frac{R^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3(n_0+1)}$ para cada $n \geq n_1$. Nótese que si k está fijo, $k \in \{0, \dots, n_0\}$ entonces $\lim_n \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \lim_n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1$

49.-) a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\quad a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \dfrac{1}{\frac{k}{2}!} & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$

para calcular el radio de convergencia conviene recordar la fórmula de Stirling: $\displaystyle\lim_n \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$ que viene a decir $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ y tiene como consecuencia $\lim_n \sqrt[n]{n!} = \infty$, razón por la cual la función exponencial tiene radio de convergencia R infinito (Ver apuntes de D. Vukotic). En nuestro caso,

$$\overline{\lim_k} |a_k|^{1/k} = \lim_{2n\to\infty} \frac{1}{(n!)^{1/2n}} = \lim_{2n\to\infty} \left(\frac{1}{(n!)^{1/n}}\right)^{1/2} = 0 \Rightarrow \boxed{R = \infty}$$

Alternativamente, es fácil ver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = e^{z^2}$$

b) Si hacemos el cambio de variable $w = z - 2\pi i$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2\pi i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-w)^n}{n!} = e^{-w} = e^{-(z-2\pi i)}$$

siendo el radio de convergencia, como en el caso de e^z, infinito.

c) Conviene recordar que si $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces $g^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n = 2\cdot 1\, z^2 + 3\cdot 2\, z^3 + \cdots + n(n-1) z^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

Si tenemos en cuenta $f(z) = 0 + z + \cdots + z^n + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

(con radio de convergencia $R=1$) entonces

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = 2(1-z)^{-3} \text{ de modo que}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n = z^2 \cdot 2(1-z)^{-3}$$

Ejemplo: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, calcular $f'(z)$, $g'(z)$ y sumar las correspondientes series.

50.-)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1} + \dots$$

de modo que $\quad z f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n \quad$; por otro lado

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n z^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-2}$$

la primera de estas dos series se parece a la que nos piden calcular y, la segunda, a la que ya hemos calculado:

$$z f'(z) = a_1 z + 2a_2 z^2 + \dots + n a_n z^n + \dots = a_1 z + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-2}$$

Ahora,
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n = a_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n z^n = a_1 z + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n z^{n-2}$$

$$= a_1 z + z^2 \left(f''(z) + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-2} \right)$$

$$= a_1 z + z^2 f''(z) + z f'(z) - a_1 z = z^2 f''(z) + z f'(z)$$

51.-)
$$\frac{z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} = \frac{-z}{3-z} + \frac{z}{2-z}$$

$$= \frac{-z/3}{1 - z/3} + \frac{z/2}{1 - z/2} = -\frac{z}{3} \sum_{n=0} \left(\frac{z}{3}\right)^n + \frac{z}{2} \sum_{n=0} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0} -\frac{1}{3^{n+1}} z^{n+1} + \sum_{n=0} \frac{1}{2^{n+1}} z^{n+1} = \sum_{n=1} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) z^n$$

$f(z) = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0} z^n$, $f'(z) = \dfrac{-1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1} -n z^{n-1}$ luego

$\dfrac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1} n z^n$. Por último, $\dfrac{2z+3}{(z+1)^2} = \dfrac{2(z-1)+5}{(z+1)^2}$

Sea $g(z) = \dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{2+(z-1)} = \dfrac{1/2}{1 + \frac{z-1}{2}} = \dfrac{1}{2} \sum_{n=0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-1)^n$

$$g'(z) = \frac{-1}{(z+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n n (z-1)^{n-1} = -\sum_{n=1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} n (z-1)^{n-1}$$

$$\frac{2(z-1)+5}{(z+1)^2} = -\sum_{n=1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n n (z-1)^n + \sum_{n=1} 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} n (z-1)^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n n (z-1)^n + \frac{5}{4} + \sum_{n=1} 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} (n+1)(z-1)^n = \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dots \right] (z-1)^n$$

51.) b)

$$f(z) = \frac{2z+3}{(z+1)^2} = \frac{2(z-1)+5}{(z+1)^2}$$

$$g(z) = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1/2}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-1)^n$$

$$g'(z) = \frac{-1}{(z+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n n\,(z-1)^{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} n\,(z-1)^{n-1}$$

Por tanto

$$f(z) = \frac{2(z-1)+5}{(z+1)^2} = 2(z-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} n\,(z-1)^{n-1} + 5\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} n\,(z-1)^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n n\,(z-1)^n + \boxed{\sum_{n=1} 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} n\,(z-1)^{n-1}}$$

$$= -\sum_{n=1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n n\,(z-1)^n + \boxed{\frac{5}{4} + \sum_{n=2} 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} n\,(z-1)^{n-1}}$$

$$= -\sum_{n=1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n n\,(z-1)^n + \frac{5}{4} + \sum_{n=1} 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}(n+1)(z-1)^n$$

$$= \frac{5}{4} - \sum_{n=1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n n\,(z-1)^n + \sum_{n=1}\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(n+1)(z-1)^n$$

$$= \frac{5}{4} + \sum_{n=1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-n+\frac{5}{4}(n+1)\right)(z-1)^n$$

$$= \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{n}{4}+\frac{5}{4}\right)(z-1)^n$$

$$= \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}(n+5)(z-1)^n$$

En la parte recuadrada hemos usado $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$

52.-) $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $R=1$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$. Sea $s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$, $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. 8.-

a) $$(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n = \sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k z^{k+1} + s_n z^n =$$

$$= s_0 z^0 + \sum_{k=1}^{n-1}(s_k - s_{k-1})z^k + (s_n - s_{n-1})z^n = S_n(z)$$ de modo que

$$f(z) = \lim_n S_n(z) = \lim_n \left[(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n \right]$$

$$= (1-z)\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k + \lim_n s_n z^n$$

$$= (1-z)\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

($\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$ es convergente si $|z|<1$ porque $\{s_k\}$ es acotada, y $\lim_n s_n z^n = 0$ porque $\{|z|^n\}$ es acotada y $\{s_n\}\to 0$). Ahora, como $f(z)$ está definida para $z=1$, por ser $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergente, ¿es $f(z)$ continua en $z=1$?

b) Lo que se prueba en este apartado es que si $\Omega \subset \{|z|<1\}$ y $M>0$ satisfacen $|1-z| \le M(1-|z|)\ \forall z\in\Omega$, entonces $f(z)\to 0 = f(1)$ si $\left. \begin{matrix} z\to 1 \\ z\in\Omega \end{matrix} \right\}$

Como $\{s_k\}\to 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |s_k| \le \frac{\varepsilon}{2M}$ si $k \geq n_0$

Sea $m(n_0) = \sup\{|s_k| : k \le n_0, 1\} > 0$. Entonces, si $z\in\Omega$ y

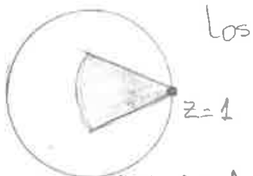
$|z-1| < \frac{\varepsilon}{2(n_0+1)\,m(n_0)}$ tendremos

$$|f(z)| = |1-z| \left| \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k \right|$$

$$\le |1-z| \left| \sum_{k=0}^{n_0} s_k z^k \right| + |1-z| \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z|^k$$

$$\le |1-z|\,(n_0+1)\,m(n_0) + |1-z| \frac{\varepsilon}{2M} \frac{1}{1-|z|} \le \varepsilon.$$

El conjunto Ω recibe el nombre de "dominio de Stolz" y tiene relación con una región llamada "ángulo de Stolz" que es un sector circular con vértice en $z=1$



Los detalles de esta relación se pueden ver en

https://demonstrations.wolfram.com/StolzAngle/

60.-) La teoría de las series absolutamente convergentes se apoya, esencialmente, en la de series de términos positivos, para los que existen diversos criterios de convergencia. Si $p>0$, la serie $\sum_{n=1} \frac{1}{n^p}$ converge si $p>1$ y diverge si $0<p\leq 1$. Aunque es un resultado conocido de otros cursos, vale la pena recordar la prueba. La divergencia para $p=1$ se sigue de esta acotación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\cdots$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

La divergencia para $0<p<1$ se deduce de que $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ si $0<p<1$.

La convergencia para $p>1$ se prueba así:

$$\frac{1}{(2^k)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^p} \leq 2^k \frac{1}{2^{kp}} = 2^{(1-p)k}$$

luego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k} = \frac{1}{1-2^{1-p}} < \infty$ (ya que $2^{1-p}<1$).

Para estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$, con $z\in\mathbb{C}$, nótese

$$|n^z| = |e^{(\ln n)z}| = e^{\operatorname{Re} z \ln n}$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|e^{-\operatorname{Re} z \ln n}\right| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}.$$

Por tanto, si $1<a\leq \operatorname{Re} z$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k^z}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^a}$$

lo cual, en virtud del M-test, significa que $\zeta(z)=\sum_{n=1}\frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en $\{z : \operatorname{Re} z\geq a\}$. Más adelante veremos que eso implica que $\zeta(z)\in\mathcal{H}(\{\operatorname{Re} z>1\})$. Mediante "continuación analítica" se puede extender ζ a una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z=1\}$ sobre la que se formula la famosa "Hipótesis de Riemann".

61.-)

a) $\log e = \ln|e| + i \arg e = 1 + (\operatorname{Arg} e + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$

$= 1 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\log(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = 0 + (\operatorname{Arg}(-i) + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$

$= \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$ $k \in \mathbb{Z}$

c) $\log(\sqrt{3}+i) = \ln|\sqrt{3}+i| + (\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i) + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i) = \alpha \quad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$\log(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $(1-i)^4 = 4e^{-\pi i}$, de modo que $\log(1-i)^4 = \log(4e^{-\pi i}) = \ln 4 + i\arg(e^{-\pi i})$

$\ln 4 + i(-\pi + 2k\pi) = \ln 4 + (2k-1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Obs: $\log(1-i)^4 \neq 4\log(1-i) \longrightarrow$ (Ver el Ej. 6 de los apuntes en relación con esto)

62.-)

a) $\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow i^{\sqrt{3}} = e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i\cdot\sqrt{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Obs: comprobar que $i^{\sqrt{3}}$ tiene infinitos valores y explicar por qué.

b) $\log 2 = \ln 2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$2^{-(1+i)} = e^{(\ln 2 + 2k\pi i)(-1-i)} = e^{-\ln 2 + 2k\pi + (-\ln 2 - 2k\pi)i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2k\pi} \cdot e^{(-\ln 2)i} = \frac{1}{2} \cdot e^{2k\pi}\left(\cos(\ln 2) - i\operatorname{sen}(\ln 2)\right), \; k \in \mathbb{Z}.$$

Obs: en este caso hay infinitos valores, con módulos no acotados, ¿por qué?

c) $2^{\pi i} = e^{(\log 2)\pi i} = e^{(\ln 2 + 2k\pi i)\pi i} = e^{-2k\pi^2} e^{(\ln 2)\pi i}$ $k \in \mathbb{Z}$

Obs: de nuevo infinitos valores pero un único argumento principal: $(\ln 2)\pi$

d) $(1-i)^i = e^{(\log(1-i))\cdot i} = e^{\left[\ln\sqrt{2} + \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i\right]i} = e^{\frac{\pi}{4} - 2k\pi} \cdot e^{\ln\sqrt{2}\, i}$

En todos los ejemplos anteriores, las potencias estaban en una recta que pasa por el origen, o en una circunferencia centrada en el origen. ¿Sucede siempre así?

63:) $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 2$ Razonamos de forma similar al Ej 2. de los apuntes. Primero multiplicamos por $2e^{iz}$

$e^{2iz} + 1 = 4e^{iz}$. Escribimos $w = e^{iz}$, y tenemos $w^2 - 4w + 1 = 0$

cuyas soluciones son $w = \frac{4+\sqrt{16-4}}{2}$, $w = \frac{4-\sqrt{12}}{2}$

$e^{iz} = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}$, $e^{iz} = 2-\sqrt{3}$.

$iz = \log(2+\sqrt{3}) = \ln(2+\sqrt{3}) + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, de donde

$$\begin{cases} z = 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3}), \\ z = 2k\pi - i\ln(2-\sqrt{3}), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

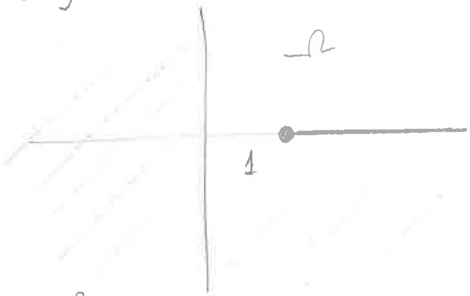
64:) $f(z) = \log(1-z)$; si $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \le 0\}$, entonces el logaritmo

ⓐ principal $\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ es derivable en G y $\log'(z) = \frac{1}{z}$.

Por tanto, si definimos $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / 1-z \in G\}$

$1-z \in G \Leftrightarrow -z \in G-1 \Leftrightarrow z \in 1-G \; (= \Omega)$

$f'(z) = \frac{-1}{1-z} \cdot = \frac{1}{z-1}$ (regla de la cadena)

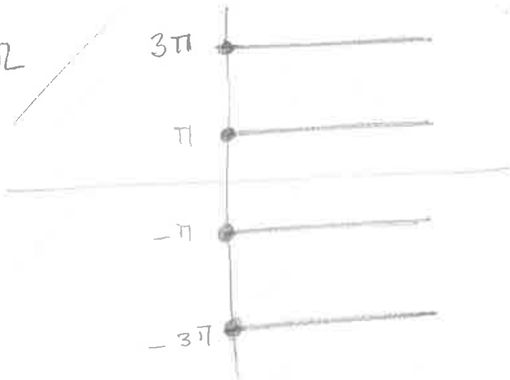


ⓑ $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$; ahora $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : e^z + 1 \in G\}$

$e^z + 1 \in G \Leftrightarrow e^z \in -1 + G \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re} z} \cdot e^{i \operatorname{Im} z} \in -1 + G \Leftrightarrow$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{x + (\pi + 2k\pi)i : k \in \mathbb{Z}, x \geq 0\} = \Omega$

$f'(z) = \frac{1}{2}(e^z + 1)^{-1/2} \cdot e^z$



Hemos considerado la raiz cuadrada asociada al logaritmo principal: $\sqrt{z} = e^{(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)\frac{1}{2}}$

lo mismo que en ⓒ $f(z) = \operatorname{sen}\sqrt{z} \in \mathcal{H}(G)$, $f'(z) = (\cos\sqrt{z})\, \frac{1}{2}\, z^{-1/2}$

ⓓ $f(z) = z^{2z} = e^{(\log z)2z} \in \mathcal{H}(G)$, $f'(z) = 2z^{2z} + z^{2z} \cdot 2\log z$ || $\log z$ es el logaritmo principal

65 i) $\binom{\alpha}{0}=1$, $\binom{\alpha}{1}=\alpha$, $\binom{\alpha}{j}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}$ si $j>1$. Para calcular el

a)

radio de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$, usamos el criterio del cociente:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!}\;\frac{k!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=1$$

de modo que el radio de convergencia es 1.

b) $(1+z)F'(z)=\alpha F(z)$ en $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$. Sabemos que $F\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y que su derivada, F', es la serie que resulta de derivar F término a término: $F'(z)=\sum_{k=1}k\binom{\alpha}{k}z^{k-1}$, de modo que

$$(1+z)F'(z)=\sum_{k=1}k\binom{\alpha}{k}z^{k-1}+\sum_{k=1}k\binom{\alpha}{k}z^k$$

$$=\sum_{k=0}(k+1)\binom{\alpha}{k+1}z^k+\sum_{k=0}k\binom{\alpha}{k}z^k$$

$$=\sum_{k=0}\left[(k+1)\binom{\alpha}{k+1}+k\binom{\alpha}{k}\right]z^k$$

$$=\sum_{k=0}\left[\cancel{(k+1)}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!\,\cancel{(k+1)}}+\frac{k\,\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\right]z^k=\alpha\sum_{k=0}\binom{\alpha}{k}z^k$$

(quitamos este paréntesis, separando la fracción en diferencia de dos)

c) Consideremos la función $g(z)=(1+z)^{\alpha}=e^{\ln(1+z)\cdot\alpha}$ donde $\ln(1+z)$ es el logaritmo principal. Entonces $g'(z)=\dfrac{\alpha}{1+z}e^{\ln(1+z)\cdot\alpha}=\alpha(1+z)^{\alpha-1}$

Por tanto, $F'(z)=(1+z)^{-1}\alpha F(z)$ y $g'(z)=(1+z)^{-1}\alpha g(z)$

¿cómo concluimos que $F=g$ en $\mathbb{D}$? Bastará probar que $h(z)=\dfrac{F(z)}{g(z)}=1$ para cada $z\in\mathbb{D}$ ($h(z)$ está bien definido porque $g(z)\neq 0$ en $\mathbb{D}$).

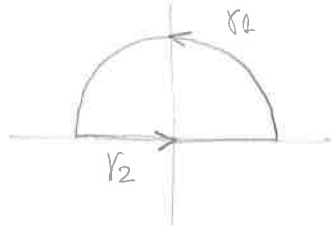
$$h'(z)=\frac{F'g-g'F}{g^2}=\frac{\alpha(1+z)^{-1}F\cdot g-(1+z)^{-1}\alpha g\cdot F}{g^2}=0$$

de modo que h es constante en $\mathbb{D}$. Como $h(0)=1$, se tiene el resultado

68;)

Conviene empezar recordando la definición de integral de línea compleja: $\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

siendo el producto que hay dentro de la integral una multiplicación compleja y γ un camino suave a trozos.



En nuestro caso, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ siendo

$\gamma_1 : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C},\ \gamma_1(t) = e^{it}$

$\gamma_2 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C},\ \gamma_2(t) = t$. Por tanto, tenemos que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} |z|\,\bar{z}\,dz + \int_{\gamma_2} |z|\,\bar{z}\,dz$$

(es una función impar)

$$= \int_0^\pi e^{-it}(i e^{it})\,dt + \int_{-1}^1 |t|\,t\,dt = \pi i + 0$$

69;) Sea $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua y $\gamma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino suave a trozos. La igualdad

$$\mathrm{Re}\left\{\int_\gamma f(z)\,dz\right\} = \int_\gamma \mathrm{Re}\{f(z)\}\,dz$$

tiene aspecto de no ser cierta porque la integral de la parte derecha no tiene necesariamente por qué ser real. Con esa idea en mente, podemos buscar un contraejemplo sencillo: $f(z) := 1$, y $\gamma: [0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{C},\ \gamma(t) = e^{it}$. Entonces,

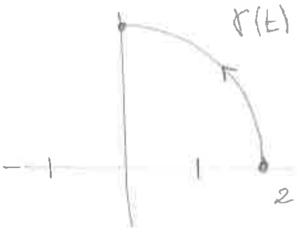
$$\int_\gamma \mathrm{Re}\{f(z)\}\,dz = \int_\gamma dz = \int_0^{\pi/2} i e^{it}\,dt = \left[e^{it}\right]_0^{\pi/2} = i - 1$$

El cálculo anterior se ha hecho usando el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea: $\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a)$ si $F'(z) = f(z)$. Para los detalles sobre este asunto, véase el ejercicio 5 en los apuntes de D. Vukotic.

70.-) Para las estimaciones que nos piden vamos a utilizar que

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \leq \max_{z\in\{\gamma\}} |f(z)|\cdot \ell(\gamma)$$

siendo $\ell(\gamma)$ la longitud de la curva (ver Prop. 6 de los apuntes).



$\gamma(t) = 2e^{it}$, $0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$.

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \max_{z\in\{\gamma\}} \left|\frac{1}{z^2+1}\right|\cdot \ell(\gamma) = \frac{\pi}{3}$$

Nótese que si $z\in\{\gamma\}$, entonces $\frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{3}$;

esta desigualdad no se puede mejorar (¿por qué?) Sin embargo, la desigualdad que hemos probado más arriba $\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{\pi}{3}$ sí que se puede mejorar, con un poco de trabajo (¿cómo?).

Para la segunda estimación del ejercicio, recordemos que

$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$. Si $z = 2e^{it} = 2\cos t + 2i\,\mathrm{sen}\,t$, $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$,

entonces
$$|\cos z| = \frac{1}{2}\left|e^{-2\,\mathrm{sen}\,t}\,e^{2i\cos t} + e^{2\,\mathrm{sen}\,t}\,e^{-2i\cos t}\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\left|e^{-2\,\mathrm{sen}\,t}\right|\left|e^{2i\cos t}\right| + \left|e^{2\,\mathrm{sen}\,t}\right|\left|e^{-2i\cos t}\right|\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-2\,\mathrm{sen}\,t} + e^{2\,\mathrm{sen}\,t}\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(e^{-2}+e^{2}\right)$$

de donde se deduce la estimación buscada. En la última desigualdad, hemos usado que la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $g(t) = e^{-2\,\mathrm{sen}\,t} + e^{2\,\mathrm{sen}\,t}$, alcanza su máximo absoluto en $t=\frac{\pi}{2}$.

Otra forma de hacerlo: calcular directamente el valor de $\int_\gamma \cos z\,dz$.

71;-) $f: D(a,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \varepsilon\}$, para cada $0 < \varepsilon < R$. Se pide demostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a)$$

Si fijamos $n \in \mathbb{N}$, existe $0 < \varepsilon_n < R$ tal que $|f(z) - f(a)| < \frac{1}{n}$ si $|z-a| \leq \varepsilon_n$ (debido a la continuidad de f en a). Entonces,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - f(a) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - f(a) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{z-a}\, dz \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a+\varepsilon e^{it}) - f(a)|}{|a+\varepsilon e^{it} - a|} |i\varepsilon e^{it}|\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a+\varepsilon e^{it}) - f(a)|}{\cancel{\varepsilon}} \cancel{\varepsilon}\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \sup\{|f(a+\varepsilon e^{it}) - f(a)| : 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

$$\leq \frac{1}{n}$$

siempre que $0 < \varepsilon < \varepsilon_n$, de modo que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - f(a) \right| = 0$ tal como queríamos demostrar. Hemos utilizado la igualdad

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{z-a}\, dz = 1$$

que se puede calcular directamente a partir de la definición, y también hemos usado la $\mathbb{C}$-linealidad de las integrales de línea complejas (ver la Proposición 2. de los apuntes).