Variable Compleja I (16449), **2019-2020** (Segundo Cuatrimestre)

Tercer curso de Grado en Matemáticas y Cuarto de Doble Grado Matemáticas - Ing. Informática

Preguntas modelo para el tercer examen parcial: respuestas

A. Sea f una función holomorfa en la corona $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ cuya serie de Laurent allí es

$$f(z) = -\frac{1}{z^3} + \frac{e}{z^2} + 1 - z^4 + \pi z^7 .$$

Entonces $\mathrm{Res}(f;0) = e$.

VERDADERO $\boxed{\text{FALSO}}$

SOLUCIÓN. $\mathrm{Res}(f;0) = 0$, el coeficiente correspondiente al término $1/z$ en la serie de Laurent (que aquí no aparece). ■

B. Denotando por C a la circunferencia unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con orientación positiva, tenemos que

$$\int_C \frac{\operatorname{sen} z - \cos z}{(z - \frac{\pi}{4})^2}\, dz = 2\pi i \sqrt{2}.$$

$\boxed{\text{VERDADERO}}$ FALSO

SOLUCIÓN. El resultado se sigue fácilmente de la Fórmula integral de Cauchy para la derivada de la función $\operatorname{sen} z - \cos z$, observando que $|\pi/4| < 1$ y, por tanto, $\pi/4$ pertenece al dominio interior a C.

Existe otra forma de verlo, que podría ser útil en otros ejemplos. El punto $z = \pi/4$ es una singularidad aislada del integrando en la que se anulan tanto el numerador como el denominador. Se trata de un polo simple: por ejemplo, por la Regla de L'Hôpital, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen} z - \cos z}{(z - \frac{\pi}{4})^2} &= \lim_{z\to\pi/4} \frac{\cos z + \operatorname{sen} z}{2(z - \frac{\pi}{4})} = \infty, \\
\lim_{z\to\pi/4} (z - \frac{\pi}{4}) \frac{\operatorname{sen} z - \cos z}{(z - \frac{\pi}{4})^2} &= \lim_{z\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen} z - \cos z}{z - \frac{\pi}{4}} = \lim_{z\to\pi/4} (\cos z + \operatorname{sen} z) = \sqrt{2},
\end{aligned}$$

El segundo límite es precisamente el residuo de la función en $\pi/4$, por la fórmula para el residuo en un polo simple. La conclusión se sigue del Teorema de los residuos. ■

C. Todo automorfismo del disco que fija el origen es una rotación.

$\boxed{\text{VERDADERO}}$ FALSO

SOLUCIÓN. Los únicos automorfismos del disco son de la forma $\varphi(z) = \lambda(a-z)/(1-\overline{a}z)$, para $|\lambda| = 1$, $|a| < 1$. La condición $\varphi(0) = 0$ implica $0 = \lambda a$. Por tanto, $a = 0$, puesto que λ no puede ser cero. Eso significa que $\varphi(z) = -\lambda z$, con $|-\lambda| = 1$ y, por tanto, es una rotación. ■

---

1. El número de ceros de la función $f(z) = z^5 - 10z + 5$ en la corona $\{z : 1 < |z| < 2\}$ es igual a:

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, $\boxed{\text{(e)}}$ 4, (f) otro valor.

SOLUCIÓN. Para $|z| = 1$, se cumple $|-10z| = 10 > 6 = z^5| + 5 \geq |z^5 + 5|$ y, por el Teorema de Rouché, f tiene el mismo número de ceros en el disco unidad que la función $-10z$ (un cero). La desigualdad obtenida muestra que f no puede tener ceros en la propia circunferencia unidad. Por tanto, tiene exactamente un cero en el disco unidad cerrado $\{z : |z| \leq 1\}$

Para $|z| = 2$, se cumple $|z^5| = 32 > 25 = |-10z| + 5 \geq |-10z + 5|$. Por el mismo resultado, f tiene el mismo número de ceros en el disco $\{z : |z| < 2\}$ que la función z^5, que es 5 (teniendo en cuenta las multiplicidades). Finalmente, en la corona $\{z : 1 < |z| < 2\} = \{z : |z| < 2\} \setminus \{z : |z| \leq 1\}$ la función tiene $5 - 1 = 4$ ceros. ■

---

2. El tipo de singularidad que tiene la función $f(z) = \dfrac{z^2}{\operatorname{sen}^4 z}$ en $z = 0$ es:

(a) evitable, (b) esencial, (c) un polo simple, $\boxed{\text{(d)}}$ un polo doble, (e) no aislada.

SOLUCIÓN. $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left(\dfrac{z}{\operatorname{sen} z}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = 1 \cdot \infty = \infty$, así que se trata de un polo.
$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \left(\dfrac{z}{\operatorname{sen} z}\right)^4 = 1 \neq 0, \infty$. Por tanto, el polo en $z = 0$ es doble. ■

---

3. Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad. Sólo uno de los siguientes conjuntos puede ser el conjunto de los ceros de una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y no constante. ¿Cual?

(a) $\{\frac{1}{e^n} : n \in \mathbb{N}\}$; $\boxed{\text{(b)}}$ $\{1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$; (c) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le \frac{1}{2}\}$; (d) $\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\}$; (e) $\{\sqrt[n]{n} - 1 : n \in \mathbb{N}\}$.

SOLUCIÓN. La solución en (b) es la única que se acumula en la frontera del disco: $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1 \in \partial\mathbb{D}$. Nótese que en esta asignatura sería muy complicado dar un ejemplo explícito de una función holomorfa con esos ceros por falta de herramientas técnicas. En Variable Compleja II se hablará de los productos infinitos y se podrá construir con ellos un ejemplo de este tipo. No obstante, sabemos por el enunciado que una de las respuestas es correcta, así que es la única que se puede elegir.
Las demás sucesiones todas se acumulan dentro de $\mathbb{D}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0 \in \mathbb{D}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \in \mathbb{D},$$

mientras en el intervalo $[0, 1/2]$ de la recta real podemos encontrar multitud de suceiones que convergen a un punto de $\mathbb{D}$, por ejemplo, $z_n = 1/(n+1)$. Por tanto, en todos los casos restantes, el Principio de los ceros aislados forzaría a la función a ser idénticamente nula. ■

---

4. Denotando por C a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} :, |z| = 1\}$ con orientación positiva, ¿cuáles de las siguientes integrales:

$$I = \int_\gamma \frac{e^{-z} - 1}{z}\, dz, \quad J = \int_\gamma \operatorname{sen} z\, dz, \quad K = \int_\gamma \frac{\cos z - 1}{z}\, dz$$

son iguales a 0?

(a) Sólo I y J, $\boxed{\text{(b)}}$ todas, (c) ninguna, (d) sólo J y K, (e) sólo J.

SOLUCIÓN. $J = 0$ por el Teorema integral de Cauchy ya que el integrando es una función entera. Las otras dos integrales son también nulas por la misma razón puesto que en ambas la única singularidad del integrando es $z = 0$ y, en ambos casos, es evitable:

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{-z} - 1}{z} = 0 = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z},$$

lo cual se puede comprobar usando la Regla de L'Hôpital o, alternativamente, el desarrollo de la exponencial y del seno en series de Taylor, cancelando el factor z en el denominador de ambas fracciones. ■

---

5. Sólo uno de los siguientes conjuntos en el plano puede ser la imagen de un dominio Ω por una función holomorfa y no constante en Ω. ¿Cuál?

(a) $\mathbb{D} \cup \mathbb{R}$; (b) $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}$; (c) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; (d) $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{(e)}}$ $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

SOLUCIÓN. La función identidad: $f(z) = z$, obviamente, lleva el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| > 1\}$ sobre sí mismo. (Nótese que es un abierto y conexo y, por tanto, un dominio, pero que no es simplemente conexo. En los apuntes optativos sobre las aplicaciones conformes, que estarán disponibles para junio, habrá más ejemplos similares, para otros dominios Ω.)
Aplicando directamente el Teorema de la aplicación abierta, vemos que los demás conjuntos ofrecidos no pueden ser imágenes de ningún dominio por ninguna función holomorfa y no constante porque ninguno de ellos es un dominio.
$\mathbb{D} \cup \mathbb{R}$ contiene puntos que no son interiores, por ejemplo, $z = 2$.
$\mathbb{D} \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ y, por tanto, no tiene ningún punto interior. Lo mismo es cierto para $\mathbb{R}$.
$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es abierto pero no conexo ya que tiene dos componentes conexas (el semiplano inferior y el semiplano superior). ■
