Variable Compleja I (16449), **2019-2020** (Segundo Cuatrimestre)

Tercer curso de Grado en Matemáticas y Cuarto de Doble Grado Matemáticas - Ing. Informática

Test-simulacro previo al segundo examen parcial - abril de 2020: Modelo B

Preguntas VERDADERO - FALSO

---

1. $f(z) = \sqrt{z}$ puede definirse como función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$.

   RESPUESTA. V

   Tal y como hemos visto en los apuntes de teoría, la función raíz cuadrada puede definirse como función holomorfa por la fórmula $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ para $z = re^{i\theta}$ (donde θ es el argumento principal), en el dominio $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Por tanto, su restricción al dominio más pequeño $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, también será holomorfa. ■

---

2. El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{2n+3}z^n}{n^2 2^n}$ es igual a $1/2$.

   RESPUESTA. F

   En primer lugar, $|a_n| = \dfrac{1}{n^2 2^n}$, así que $|a_n|^{1/n} = \dfrac{1}{2(\sqrt[n]{n})^2}$. Recordando que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, el radio de convergencia se calcula directamente, según la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

   ■

---

3. La función $f(z) = \cos(-z)$ está acotada en el plano.

   RESPUESTA. F

$$f(z) = \cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2}.$$

   Evaluando f en los puntos $z_n = in$, vemos que

$$|f(z_n)| = |\cos(-in)| = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \to +\infty, \qquad n \to \infty. \qquad \blacksquare$$

---

4. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$ es la derivada de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en el disco donde ésta converge.

   RESPUESTA. V

   Según el teorema sobre la derivada de las series de potencias, en el disco de convergencia se tiene

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}z^k = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n. \qquad \blacksquare$$

Preguntas de opción múltiple

---

5. El conjunto de todos los valores posibles del logaritmo complejo $\log(1+i)$ está formado por

(a) $\ln 2 - \frac{\pi i}{4}$, (b) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi i}{4} + \pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$, (c) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$,

(d) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$, (e) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$, (f) ninguno de los anteriores.

RESPUESTA. **c**

Representación polar: $1+i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$. Por tanto, los valores del logaritmo complejo son:

$$\log(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

---

6. Sea C_R la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior, centrada en el origen, recorrida desde R hasta $-R$. El límite $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{2z+1}{(z+1)^3}\,dz$ es:

(a) ∞; (b) 0; (c) 1; (d) $\frac{1}{2}$; (e) 2; (f) no existe.

RESPUESTA. **b**

Según un lema que se puede encontrar en los apuntes, cuando P y Q son dos polinomios tales que $\operatorname{gr} Q \geq \operatorname{gr} P + 2$, entonces

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \to 0, \qquad R \to +\infty,$$

El lema es aplicable con $P(z) = 2z+1$ (grado uno), $Q(z) = (z+1)^3$ (grado tres). $\blacksquare$

---

7. Si C denota a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ con la orientación positiva (antihoraria), la integral

$$\int_C \frac{\cos z - 1}{z^2}\,dz$$

es igual a:

(a) $-2\pi i$, (b) $2\pi i$, (c) $-\pi i$, (d) πi, (e) 0, (f) ninguno de los anteriores.

RESPUESTA. **e**

Consideremos la función entera $f(z) = \cos z - 1$. Según la fórmula integral de Cauchy para la derivada en el origen (que es un punto en el interior de la curva, de hecho, es el centro), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz = f'(0).$$

Puesto que $f'(z) = -\operatorname{sen} z$, $f'(0) = 0$, se sigue que

$$\int_C \frac{\cos z - 1}{z^2}\,dz = 0. \qquad \blacksquare$$
