Variable Compleja I (16449), **2019-2020** (Segundo Cuatrimestre)

Tercer curso de Grado en Matemáticas y Cuarto de Doble Grado Matemáticas - Ing. Informática

Test-simulacro previo al segundo examen parcial - abril de 2020: Modelo A

Preguntas VERDADERO - FALSO

---

1. $f(z) = \log z$ puede definirse como función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$.

   RESPUESTA: V

   Tal y como hemos visto en los apuntes de teoría, la función logaritmo puede definirse como función holomorfa por la fórmula $\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ en el dominio $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Por tanto, su restricción al dominio más pequeño $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, también será holomorfa. ■

---

2. La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es holomorfa en el disco unidad (o en otro disco más grande) si y solo si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le 1$.

   RESPUESTA: V

   La serie es holomorfa en el disco unidad u otro más grande si y sólo si su radio de convergencia es $R \ge 1$. Según la fórmula de Cauchy-Hadamard, eso significa que

   $$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \ge 1\,,$$

   lo cual es equivalente a la condición formulada en el problema. ■

---

3. La función $f(z) = \operatorname{sen}(2z)$ está acotada en el plano.

   RESPUESTA: F

   $$f(z) = \operatorname{sen}(2z) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i}\,.$$

   Evaluando f en los puntos $z_n = -i n$, vemos que

   $$|f(z_n)| = |\operatorname{sen}(-2in)| = \left|\frac{e^{2n} - e^{-2n}}{2i}\right| = \frac{|e^{2n} - e^{-2n}|}{2} \to +\infty, \qquad n \to \infty. \qquad ■$$

---

4. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ es la derivada de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en el disco abierto donde ésta converge.

   RESPUESTA: V

   Según el teorema sobre la derivada de las series de potencias, en el disco de convergencia se tiene

   $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n. \qquad ■$$

---

5. El conjunto de todos los valores posibles del logaritmo complejo $\log(1-i)$ está formado por

(a) $\ln 2 - \frac{\pi i}{4}$, (b) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi i}{4} + \pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$, (c) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$,

(d) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$, (e) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$, (f) ninguno de los anteriores.

RESPUESTA: **e**

Representación polar: $1 - i = \sqrt{2} e^{-\pi i/4}$. Por tanto, los valores del logaritmo complejo son:

$$\log(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

---

6. ¿Cuál de las siguientes condiciones puede cumplir (para todo $z \in \mathbb{C}$) una función f entera y no constante?

(a) $|f(z)| \le e^{-|z|}$; (b) $|f(z)| \le 4e^{2|z|}$; (c) $|f(z)| \le |z|^2/(|z|^3+2)$;

(d) $|f(z)| \le 1/(|z|+1)$; (e) $|f(z)| \le |z|/(|z|^2+1)$ (f) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: **b**

En las opcíones (a), (c), (d), (e), la cota que aparece a la derecha es una función de $|z|$ y tiende a 0 cuando $|z| \to +\infty$. Por tanto, en cada una de ellas se obtiene que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, luego f tiene que estar acotada en el plano y, por Liouville, tiene que ser constante. (f está acotada en todo el plano al estar acotada, por ejemplo, por 1 en un entorno del infinito $\{z : |z| > R\}$ debido al límite cero en el infinito; puesto que $|f|$ es continua, por compacidad, f también está acotada en el disco $\overline{D}(0;R)$, luego está acotada en el plano por el máximo de las dos cotas.)

Sin embargo, es fácil ver que la función entera $f(z) = 4e^{2z}$ no es constante y cumple la condición

$$|f(z)| = 4e^{2\operatorname{Re} z} \le 4e^{2|z|}. \qquad \blacksquare$$

---

7. Denotando por C a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la orientación positiva, la integral

$$\int_C \frac{\cos z - 1}{z^2}\, dz$$

es igual a:

(a) $-2\pi i$, (b) $2\pi i$, (c) $-\pi i$, (d) πi, (e) 0, (f) ninguno de los anteriores.

RESPUESTA: **e**

Consideremos la función entera $f(z) = \cos z - 1$. Según la fórmula integral de Cauchy para la derivada en el origen (que es un punto en el interior de la curva, de hecho, es el centro), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^2}\, dz = f'(0).$$

Puesto que $f'(z) = -\operatorname{sen} z$, $f'(0) = 0$, se sigue que

$$\int_C \frac{\cos z - 1}{z^2}\, dz = 0. \qquad \blacksquare$$
