Variable Compleja I (16449), **2019-2020** (Segundo Cuatrimestre)

Tercer curso de Grado en Matemáticas y Cuarto de Doble Grado Matemáticas - Ing. Informática

Información sobre el segundo examen parcial del día 30 de abril de 2020

El segundo examen parcial constará de entre 10 y 15 preguntas breves y sencillas que permitan contestación en un tiempo muy limitado. Habrá varios modelos similares pero diferentes entre sí, así que cada estudiante podría tener un modelo diferente.

El examen será de tipo test, con 5 posibles respuestas por pregunta o con opciones verdadero/falso y no se pedirá adjuntar ninguna justificación del trabajo. En las preguntas con 5 opciones para elegir, cada respuesta correcta valdrá 1 punto, cada respuesta en blanco 0 puntos y se restarán 0,2 puntos por cada respuesta incorrecta. En las preguntas con opciones verdadero/falso, cada respuesta correcta valdrá 0,5 puntos, cada respuesta en blanco 0 puntos y se restarán 0,3 puntos por cada respuesta incorrecta. La máxima puntuación posible será de 10 puntos, como es habitual.

Si finalmente los problemas técnicos no lo impiden, el examen se realizará a través de Moodle. Por ello será importante conectarse a la plataforma con varios minutos de antelación al comienzo del examen y, una vez comenzada la prueba, ir marcando las respuestas en las casillas previstas para ello lo antes posible (para evitar cualquier problemas con la hora del cierre del periodo de evaluación, que será corto). No obstante, también será importante prestar atención al correo electrónico al comienzo de la prueba, por si finalmente los exámenes se tuvieran que enviar por ese medio y a los distintos grupos dentro de la clase, según el modelo. En ese caso, habrá que contestar tecleando las respuestas en un correo electrónico, enviado al coordinador o al profesor indicado dentro del plazo previsto y en el siguiente formato, por ejemplo: 1. F, 2. V, 3. c, 4. b, etc.

El contenido del examen cubrirá el material correspondiente a las hojas de problemas de 4 a 6, ambas inclusive. Por supuesto, se requerirá el dominio del material visto previamente en clase, como las operaciones con los números complejos, su representación polar y la fórmula de A. de Moivre, las raíces, los lugares geométricos, la convergencia de las sucesiones, la continuidad y holomorfía de funciones, las ecuaciones de Cauchy-Riemann, etc. En cuanto al material reciente, se espera que los estudiantes tengan las siguientes destrezas para el segundo examen parcial:

- Reconocer o calcular explícitamente la conjugada armónica de una función compleja,
- Determinar el radio y disco de convergencia de una serie de potencias compleja,
- Saber sumar y multiplicar dos series de potencias (hallando su producto de Cauchy),
- Saber derivar una serie de potencias compleja y hallar las sumas de ciertas series asociadas que se puedan calcular de forma explícita,
- Saber calcular los valores del logaritmo (o potencias reales o complejas) de un número complejo,
- Entender y saber determinar el dominio de definición de una función logarítmica, raíz o potencia como función holomorfa,
- Conocer el teorema de la función inversa para las funciones holomorfas y saber aplicarlo,
- Saber utilizar la fórmula integral de Cauchy para evaluar el valor de cierta función holomorfa o de sus derivadas y evaluar ciertas integrales de línea,
- Dominar los desarrollos en serie de las funciones exponencial, trigonométricas o hiperbólicas y saber desarrollar otras funciones elementales (algunas racionales, potencias o logaritmos) en serie de potencias en los discos apropiados,
- Saber resolver ecuaciones funcionales para las funciones holomorfas (en ciertos discos o enteras),
- Entender cómo se aplican el teorema de Liouville y las estimaciones de Cauchy para deducir conclusiones acerca de las funciones enteras que cumplan ciertas restricciones.

Finalmente, incluimos algunas preguntas modelo para practicar (con 6 opciones en lugar de 5). Los estudiantes que hayan estudiado detalladamente los materiales docentes del curso deberían ser capaces de contestar todas o casi todas estas preguntas en un tiempo de 30-40 minutos.

A. $f(z) = \log z$ puede definirse como función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$.

VERDADERO FALSO

B. La función $f(z) = \operatorname{sen}(2z)$ está acotada en el plano.

VERDADERO FALSO

---

1. El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{2n+3} z^n}{n^2 2^n}$ es igual a:

(a) 2, (b) $+\infty$, (c) 1, (d) $\frac{1}{2}$, (e) 0, (f) otro valor.

---

2. El conjunto de todos los valores posibles del logaritmo complejo $\log(1-i)$ está formado por

(a) $\ln 2 - \frac{\pi i}{4}$, (b) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi i}{4} + \pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$, (c) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$,

(d) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$, (e) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$, (f) ninguno de los anteriores.

---

3. Para $|z| < 1$, la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$ es igual a:

(a) $(1-z)^{-1}$; (b) $z(1-z)^{-2}$; (c) $(1-z)^{-2}$; (d) $z(1-z)^{-1}$; (e) $(1+z)(1-z)^{-1}$; (f) otra.

---

4. Denotando por C a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la orientación positiva, la integral

$$\int_C \frac{\cos z - 1}{z^2}\, dz$$

es igual a:

(a) $-2\pi i$, (b) $2\pi i$, (c) $-\pi i$, (d) πi, (e) 0, (f) ninguno de los anteriores.

---

5. ¿Cuál de las siguientes condiciones puede cumplir una función f entera y no constante?

(a) $|f(z)| \le e^{-|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$; (b) $|f(z)| \le 4e^{2|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$;

(c) $|f(z)| \le |z|^2/(|z|^3 + 2)$ para todo $z \in \mathbb{C}$; (d) $|f(z)| \le 1/(|z| + 1)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(e) $|f(z)| \le |z|/(|z|^2 + 1)$ (f) Ninguna de las anteriores.
