Variable Compleja I CURSO 2019-20, U.A.M.

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 9 DE PROBLEMAS

Teorema de Rouché

99) ¿Cuántos ceros tiene la ecuación $e^z - 4z^n + 1 = 0$ en el disco unidad?

100) Halle el número de ceros de la función holomorfa $f(z) = z^4 - 12z^2 + 15z + i$:

a) en el disco unidad; **b)** en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; **c)** en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2\}$.

101) Encuentre razonadamente todos los polinomios mónicos $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ para los cuales $|p(z)| < 1$ para todo z en la circunferencia unidad.

Teorema de la aplicación abierta, principio del módulo máximo

102) Determine razonadamente todas las funciones $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tales que:

a) $\operatorname{Re} f(z) \cdot \operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$; **b)** $\operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

103) Sea Ω un dominio en el plano y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Use el Principio del módulo máximo o el Teorema de la aplicación abierta para demostrar las siguientes afirmaciones.

a) Si $|f(z)|$ es constante en Ω, entonces f es constante en Ω.

b) Si $\operatorname{Re} f \equiv 0$ en Ω, entonces f es una constante puramente imaginaria.

104) Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y γ un contorno contenido en Ω junto con su dominio interior. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $|f| \equiv 1$ en $\{\gamma\}$, demuestre que entonces bien f tiene algún cero en el interior de γ, bien es constante en Ω.
Ayuda: Aplique el Principio del módulo máximo a $1/f$.

Lema de Schwarz. Automorfismos del disco

105) Supongamos que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq |2 - z|$, para todo $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Demuéstrese que $\left|f\left(\frac{2}{3}\right)\right| \leq \frac{8}{9}$. ¿Para qué funciones se tiene la igualdad?

106) Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = f'(0) = 0$. Demuestre que $|f(z)| \leq |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
Sugerencia: Aplique el lema de Schwarz dos veces consecutivas, junto con algún resultado acerca de los ceros y las singularidades aisladas.

107) a) Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ una función con las siguientes propiedades: $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $f(a) = 0$ para un punto $a \in \mathbb{D}$. Demuestre que entonces $|f'(a)|(1 - |a|^2) \leq 1$. Estudie cuándo se tiene la igualdad.

b) Halle una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ y $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}i$.
Ayuda: En el primer apartado, considere la composición con un automorfismo apropiado del disco unidad. En el segundo, use el resultado del primer apartado.