Variable Compleja I CURSO 2019-20, U.A.M.

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 8 DE PROBLEMAS

Singularidades aisladas. Series de Laurent

92) Clasifique las singularidades de las siguientes funciones por su tipo:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{z^2+2z+1}; \qquad \textbf{b)}\ \frac{1+z}{1-\cos z}; \qquad \textbf{c)}\ \frac{z^2}{\operatorname{sen} z}; \qquad \textbf{d)}\ \operatorname{sen}\frac{1}{z^2}.$$

Después calcule los residuos correspondientes.

93) Sean f y g dos funciones holomorfas en $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$. Demuestre que si f tiene un cero de orden n y g tiene un cero de orden $n+1$ en el punto a, entonces f/g tiene un polo simple en a. Calcule el residuo $\operatorname{Res}(f/g; a)$.

94) Halle los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones en las coronas indicadas:

$$\textbf{a)}\ \cos\frac{1}{z}, \quad 0 < |z| < +\infty, \qquad \textbf{b)}\ z^2 e^{1/(1-z)}, \quad 0 < |z-1| < +\infty; \qquad \textbf{c)}\ \frac{1}{z(z-1)}, \quad 1 < |z| < +\infty.$$

Cálculo de residuos. Aplicaciones cuantitativas

95) Calcule las siguientes integrales:

$$\text{(i)}\ \int_{|z|=1} \frac{1+z}{1-\cos z}\,dz, \qquad \text{(ii)}\ \int_\gamma z^n e^{1/z}\,dz,$$

sabiendo que en (ii) γ es un contorno (orientado positivamente) alrededor del origen y n es un número natural.

96) Calcule las siguientes integrales trigonométricas usando la integración sobre la circunferencia unidad y la fórmula integral de Cauchy (o el teorema de los residuos):

$$\textbf{a)}\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\,dt, \qquad \textbf{b)}\ \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+a}}, \quad a > 0.$$

97) Use el contorno adecuado y el teorema de los residuos para deducir las siguientes fórmulas:

$$\textbf{a)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+81} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}, \qquad \textbf{b)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+81} = \frac{\pi\sqrt{2}}{54}.$$

98) Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}$, justificando la respuesta detalladamente.