Variable Compleja I **CURSO 2019-20, U.A.M.**

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 7 DE PROBLEMAS

Teorema de Green; teorema integral de Cauchy. Índice. Función primitiva

84) Sea γ un contorno (curva simple y cerrada, C^1 a trozos) que encierra una región de área S. Demuestre que
$$S = \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\,dz.$$

85) Sea γ una curva simple, cerrada y C^1 a trozos, contenida en el segundo cuadrante (abierto). Calcule las siguientes integrales, justificando las respuestas:
$$\textbf{a)}\ \int_\gamma z \operatorname{sen} z^2\,dz, \qquad \textbf{b)}\ \int_\gamma \frac{z^2\cos z}{z-3i}\,dz, \qquad \textbf{c)}\ \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z\,dz}{(z+2)^3}.$$

86) Consideremos la curva cerrada y suave a trozos $\gamma : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{C}$, parametrizada como sigue:
$$\gamma(t) = \begin{cases} \cos t + i \operatorname{sen} t, & \text{si } t \in [-2\pi, 0] \\ -1 + 2\cos 3t + 2i \operatorname{sen} 3t, & \text{si } t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$
Calcule las siguientes integrales, evitando cálculos largos:
$$\textbf{a)}\ \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz, \qquad \textbf{b)}\ \int_\gamma \frac{1}{z+1-i}\,dz.$$

87) Sea γ una curva C^1 a trozos desde el origen hasta el punto $-i$, sin puntos comunes con el semieje $\{x \in \mathbb{R} : x \le -1\}$. Calcule las integrales
$$\textbf{a)}\ \int_\gamma e^{-z}\,dz, \qquad \textbf{b)}\ \int_\gamma \frac{dz}{z+1}.$$

Teorema de unicidad (principio de los ceros aislados)

88) Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad. Demuestre que no existe ninguna función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$$
para $n = 2, 3, 4, \ldots$.

89) Halle todas las funciones enteras f tales que $f(z) = f(z^2)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, usando el principio de los ceros aislados.

90) Halle razonadamente todas las funciones holomorfas en el disco $D(1;1) = \{z : |z-1| < 1\}$ y que allí satisfagan la condición
$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

91) Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y
$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{1}{2^n} \qquad \text{para} \quad n \ge 2,$$
entonces f es idénticamente cero en $\mathbb{D}$.
Sugerencia: Puesto que $f(0) = 0$, se sigue que $f(z) = z^k g(z)$ con $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y $g(0) \ne 0$. Compruebe que ésto es imposible.