Variable Compleja I **CURSO 2019-20, U.A.M.**

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 6 DE PROBLEMAS

Integrales de línea en forma compleja. Propiedades básicas y estimaciones

68) Calcule $\int_\gamma |z|\overline{z}\,dz$, donde γ es el camino cerrado con orientación positiva, compuesto por la semicircunferencia superior de la circunferencia unidad $\{z : |z| = 1\}$ y el segmento $-1 \le x \le 1$ del eje real.

69) ¿Es cierto que $\mathrm{Re}\left\{\int_\gamma f(z)\,dz\right\} = \int_\gamma \mathrm{Re}\{f(z)\}\,dz$ para toda f continua con valores complejos? Razone la respuesta.

70) Sea γ el arco cerrado de la circunferencia $|z| = 2$ comprendido en el primer cuadrante. Deduzca las siguientes estimaciones

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \frac{\pi}{3}, \qquad \left|\int_\gamma \cos z\,dz\right| \le \frac{\pi}{2}\left(e^2+e^{-2}\right).$$

71) Sea f una función compleja continua en el disco abierto $D(a;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ (no suponemos que sea holomorfa). Si $0 < \varepsilon < R$ y C_ε denota a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \varepsilon\}$ orientada positivamente, demuestre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).$$

(**Ayuda**: Interprete la integral usando la definición.)

Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias

72) Sea f una función holomorfa en un dominio Ω que contiene al disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \le 1\}$. Si $f(z) = 0$ cuando $|z| = 1$, demuestre que entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

73) Calcule las siguientes integrales, aplicando la versión básica de la fórmula integral de Cauchy para circunferencias:

$$\textbf{a)} \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz, \qquad \textbf{b)} \int_{|z|=1} \frac{z^2+2}{z(z-3)}\,dz, \qquad \textbf{c)} \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2+3i}, \qquad \textbf{d)} \int_{|z|=1} \frac{2}{1-4z^2}\,dz.$$

Todas las circunferencias tienen orientación positiva.
(**Ayuda:** Conviene identificar ciertas funciones holomorfas en los dominios apropiados, usando fracciones simples donde sea necesario.)

74) Calcule las siguientes integrales, aplicando la versión de la fórmula integral de Cauchy para la derivada:

$$\textbf{a)} \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\,dz, \qquad \textbf{b)} \int_{|z|=4} \frac{z^2+2}{(z-3)^3}\,dz.$$

Las circunferencias tienen orientación positiva.

Desarrollo de funciones holomorfas en series de Taylor

75) Desarrolle las siguientes funciones en series potencias del tipo indicado y determine el disco de convergencia:

a) $z^{3/2}$, en potencias de $z-1$; **b)** $\cosh z$, en potencias de $z+1$.

76) Encuentre razonadamente todas las funciones enteras f que satisfagan la siguiente ecuación funcional:

$$f(z)+f(-z)=z^2+z^4, \qquad \forall z\in\mathbb{C},$$

usando el desarrollo de f en serie de Taylor y su unicidad.

77) Encuentre razonadamente todas las funciones enteras f que satisfagan la siguiente ecuación funcional:

$$f(z)+f(w)=f(z+w)+1, \qquad \forall z,w\in\mathbb{C},$$

de dos maneras: **a)** usando el desarrollo de f en serie de Taylor; **b)** usando la derivada compleja.

Funciones enteras. Teorema de Liouville y estimaciones de Cauchy

78) Si f es entera y para algún $a\in\mathbb{C}$ y $r>0$ satisface la desigualdad $|f(z)-a|\geq r$ para todo $z\in\mathbb{C}$, demuestre que f es constante.

Sugerencia: Aplique el teorema de Liouville a la función adecuada.

79) Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y no es constante, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Sugerencia: Use el resultado del ejercicio anterior.

80) Si f es entera y cumple la desigualdad $|f(z)|\leq \pi e^{2\,\mathrm{Re}\,z}$ para todo $z\in\mathbb{C}$, demuestre que

$$f(z)=ae^{2z}, \qquad a\in\mathbb{C}.$$

¿Qué condición debe cumplir la constante a?

Sugerencia: Aplique el teorema de Liouville a la función adecuada.

81) Determine razonadamente todas las funciones enteras f (holomorfas en $\mathbb{C}$) tales que

$$|f(z)|\leq \frac{2020\,|z|^2}{|z|^2+1}, \qquad \text{para } |z|\geq 21073.$$

82) Demuestre que si f, una función entera, satisface

$$f(z+1)=f(z), \qquad f(z+i)=f(z)$$

para todo $z\in\mathbb{C}$, entonces f es una función constante.

Sugerencia: Use el teorema de Liouville.

83) Sea f una función entera. Si

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=0,$$

demuestre que f es constante.

Sugerencia: Use las estimaciones de Cauchy.